Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

60e jaargang
1984|1985
november

Euclides 3

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1^1/_2$. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Gironr 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949. Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Leerstijlaspecten; rigiditeit versus flexibiliteit[1]

Er is *moed* voor nodig om te veranderen
wat aan verandering toe is.
Maar ook *kracht* om te bewaren
wat niet verloren mag gaan.

Harrie Broekman

In de artikelen 'leerstijlaspecten' veld(on)afhankelijkheid I en II[2] heb ik aangegeven dat leerlingen zich bij het opnemen, verwerken en gebruiken van begrippen, algoritmen, werkwijzen e.d. een kenmerkende stijl verwerven.
Ten aanzien van het daar behandelde leerstijlaspect 'veld(on)afhankelijkheid heb ik enkele suggesties gedaan i.v.m. het rekening houden met verschillen tussen de leerlingen. Door een op interactie gerichte aanpak, door stapsgewijze opbouw, door duidelijke typografie en het goed gebruiken van het visuele kúnnen we de meer veldafhankelijke leerlingen een grotere kans geven zich op wiskundig gebied te ontwikkelen. Ook bij het in dit artikel aan bod komend leerstijlaspect 'rigiditeit' zullen enkele suggesties gedaan worden voor de klassepraktijk. Daaraan voorafgaand zal ik echter eerst aangeven wat onder 'rigiditeit' verstaan wordt, om vervolgens een viertal punten te bespreken die rigiditeit oproepen en/of versterken. Aan deze vier punten gekoppeld zullen dan een aantal suggesties volgen. Het geheel wordt afgesloten door een korte samenvatting.

Einstellung, Rigiditeit

'Ja, maar zo doe je dat toch altijd!?'

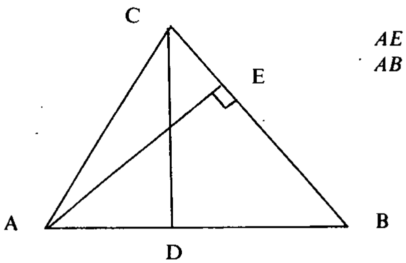
Voorbeeld
$x^2 + 6x - 7 = 0$ etc. werden opgelost door ontbinden, daarna door kwadraatafsplitsing en vervolgens met de a,b,c-formule.
$x^2 + 8x + 12 = 0$ en $x^2 + 5x = 0$ werden door veel leerlingen eveneens met het 'kanon' aangepakt.
(leraar tegen leerling: waarom zal die naam verzonnen zijn?)
Met dit voorbeeld[3] wil ik aangeven dat nogal wat leerlingen zich kennelijk instellen op een bepaalde aanpak en deze ook toepassen op een probleem dat in onze ogen 'eenvoudiger' aangepakt kan worden, zoals hier door ontbinden in factoren. Dit verschijnsel wordt wel *Einstellung* genoemd.
Erger is het nog als de ingeslepen aanpak (in dit geval het benutten van het kanon) gebruikt wordt in een situatie waar het niet kan of mag, zoals bij $x^3 - 3x^2 + 4x = 0$. In dat geval pleegt men te spreken van *Rigiditeit*.
Voor het vervolg zal ik de begrippen Einstellung, rigiditeit en flexibiliteit als volgt definiëren:
Einstellung is de tendentie om op een bepaalde manier waar te nemen en/of te reageren op een voorwerp, een opgave of een situatie.
Rigiditeit is het *on*vermogen om een Einstellung te veranderen en verschillende benaderingen te proberen bij het oplossen van opgaven.
Flexibiliteit is het vermogen om verschillende benaderingen te proberen bij het oplossen van opgaven.

Einstellung en rigiditeit kunnen opgeroepen en versterkt worden door gemakzucht, faalangst, het te formele karakter van bepaalde leerstof, maar ook door de oogkleppen die de leerlingen soms door het leerboek of de leraar opgezet krijgen.
Ieder van deze punten zal ik in het volgende aan de orde laten komen, geïllustreerd met enkele voorbeelden en gevolgd door een korte samenvatting.

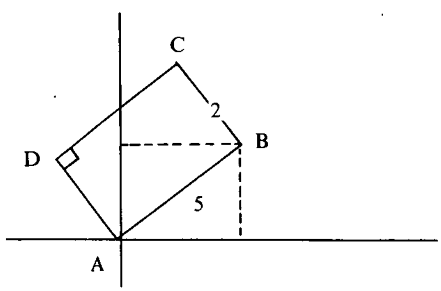
I Gemakzucht

Hierover wil ik kort zijn: juist in de wiskunde leren we (gezonde!) gemakzucht waarderen, bijv. door in die gevallen waar we veelvuldig een zelfde type berekening moeten uitvoeren een formule te ontwikkelen.
Daarna hoeven we 'alleen maar' te substitueren. Dat dit soms wat uit de hand loopt is duidelijk het geval bij de volgende voorbeelden, die deels door Van 't Riet en Bos genoemd zijn.

Voorbeeld 1
De leerlingen hebben zeer goed geleerd dat een veelgebruikte rechthoekige driehoek de zijden 3, 4, 5 heeft. Bij de vraag: 'wat is de oppervlakte van $\triangle ABC$?' wordt door een leerling, gezien de gegevens, direct aan 3,4,5 gedacht en aan BE de lengte 5 toegekend; en toen liep deze leerling vast.



Voorbeeld 2
De leerlingen hebben een aantal oppervlaktes uitgerekend door rechthoeken om te bouwen en stukken op te tellen en af te trekken Bij de vraag: 'wat is de oppervlakte van rechthoek $ABCD$' werd dat eveneens geprobeerd.



Voorbeeld 3 (eindexamen HAVO 1974)

$f: x \to (x-2)^2(2x+1)$ en $g: x \to 2(2x+1)$

Voor welke x geldt: $f(x) = g(x)$?
Veel leerlingen pakten dit vraagstuk aan door haakjes weg te werken, terwijl we mogen aannemen dat de leerlingen vergelijkingen van het type $AC = BC$ konden oplossen.

Voorbeeld 4
Bij het doornemen van het leerstofpakketje 'Matrices' kostte het mij moeite om de mij bekende volgorde/richting te veranderen.

Vermenigvuldigingstabel met 'volgorde'

×	5	7
2	10	14
3		

$2 \times 5 = 10$

$2 \times 7 = 14$

etc.

VAN

		K	R	N	O	L
NAAR	K	0	3	4	5	7
	R	3	0	4	2	4
	N	4	4	0	6	8
	O	5	2	6	0	2
	L	7	4	8	2	0

K = Katwijk; N = Noordwijk; R = Rijnsburg; O = Oegstgeest; L = Leiden

Is hier iets aan te doen?
Anders gezegd: kunnen we voorkomen dat de gezonde gemakzucht zo ongezond gaat uitpakken? Een eenduidig, volledig antwoord op deze vraag is niet te geven. Toch zijn er wel een aantal suggesties te doen waarmee we een eind kunnen komen.

1 Het is van belang dat de leerlingen *bewust leren kiezen* voor een bepaalde aanpak, een bepaald algoritme, wetende dat deze aanpak, dit algoritme wel eens omslachtig is of zelfs niet werkt. Skemp, Van Parreren en vele anderen benadrukken juist dit bewuste kiezen.
2 Amerikaans onderzoek naar de 'more successful mathematics teachers' – zowel qua prestatie van de leerlingen als qua persoonlijke waardering door de leerlingen – geeft aan dat deze succesvolle wiskunde leraren meer tijd besteden aan het stellen van zgn. procesvragen (vragen om verklaringen) dan

hun minder succesvolle collega's. Uit dit onderzoek valt de aanwijzing te halen dat *onderwijsleergesprekken en klassegesprekken* leerlingen helpen tot betere resultaten te komen.

3 Het gebruik maken en oproepen van de *verwondering*[4] kan eveneens helpen om het alleen maar volgen van vaste patronen, daar waar nodig, te doorbreken.

II Faalangst

De angst om te falen, het zoeken van een stukje veiligheid, maakt dat veel leerlingen zich vastklampen aan – al dan niet begrepen – foefjes, regeltjes, maar ook zeer nette algoritmen. Het ontbreekt deze leerlingen aan het lef om gewoon eens iets te proberen.
Nu krijgen ze daar ook niet zo de kans voor, want proberen betekent de tijd hebben en nemen om over die probeersels te praten, niet alleen door de leerling zelf, maar ook door de leraar. Dat is niet gemakkelijk in een klas waar ook een aantal leerlingen zitten die allang onze 'goede' oplossingsmethode door hebben. Ook het overvolle, gestroomlijnde programma speelt hier een negatieve rol bij.
Dit volle programma maakt dat je als leraar de neiging hebt om op te schieten, snel door te stoten naar de moeilijkere delen van een hoofdstuk. Het lef om te geloven in het elastiekjesmodel – veel tijd uittrekken voor de start van een onderwerp, zodat de basis gelegd wordt voor een latere, snellere voortgang – ontbreekt daardoor bij veel leerboekschrijvers én leraren. In de terminologie van Van Hiele: het grondniveau komt onvoldoende aan bod. Dit zorgt er ook voor dat nieuwe begrippen en rekenwijzen soms gebouwd worden op een zeer wankele ondergrond, hetgeen nog versterkt wordt door het gebruik van woorden/begrippen die in het dagelijks leven een net iets andere betekenis hebben. Voorbeelden daarvan zijn 'ruit' (de meeste ruiten zijn rechthoeken en als mijn vrouw het over een ruitje heeft bedoelt ze weer iets anders), 'afstand' (veel afstanden geven we in het dagelijks leven aan door middel van benodigde reistijd), 'hoogtelijn' (altijd verticaal?), 'relatie', 'functie', 'macht', etc.

Is hier iets aan te doen?
Anders gezegd: kunnen we rekening houden met de faalangst en deze misschien zelfs verminderen?
Ook op deze vraag kan niet zonder meer ja, of nee, geantwoord worden. Het enige dat daar met zekerheid over te zeggen valt is dat het vaak helpt als we de leerlingen zoveel mogelijk duidelijkheid verschaffen, ze de tijd geven om te zoeken, te proberen én over hun probeersels in een open sfeer te praten.
In ieder geval is het zo dat een toedekken van onbegrip, of halfbegrip, door foefjes etc. beslist niet helpt. Hooguit op de korte termijn, maar dat helpt de leerling maar zelden voor de lange termijn. Het kan – bewust toegepast – hooguit helpen de leerling uit een put te trekken; of zoals H. J. Hermans[5] het zegt: het gevoel te geven dat hij/zij misschien toch wel iets kan. Meer is het beslist niet.

III Het formele denken

In het artikel 'Setvorming, wat valt er aan te doen?' noemt Bos twee groepen van voorbeelden: a) voorbeelden die betrekking hebben op onvoldoende verwerkte algoritmen en b) voorbeelden die betrekking hebben op sterke verwachtingspatronen.
In deze paragraaf wil ik nader ingaan op a), in de volgende paragraaf op b). Bij Bos lezen we het volgende:

> Stellen we nu de vraag: hoe kan setvorming door onverwerkte algoritmen verminderd resp. vermeden worden? Het antwoord ligt voor de hand: Dit kan alleen door de algoritmen beter te behandelen. Als algoritmen goed begrepen zijn en vooral als ook hun draagwijdte doorzien wordt, zal in ieder geval van rigiditeit geen sprake zijn. Een kortere weg kan uiteraard ook dan nog wel over het hoofd gezien worden.

Dat er bij goed begrepen algoritmen, waarvan de draagwijdte doorzien wordt, geen sprake zal zijn van rigiditeit hoeft niet te gelden voor de lange termijn. Van groot belang is daarbij de manier waarop we het algoritme bijhouden. Bos zegt hierover:

> Belangrijker misschien dan de behandeling van de algoritmen is de wijze waarop in het verdere onderwijs op de oude algoritmen wordt teruggekomen. In de eerste plaats is het nodig dat geregeld gevraagd wordt: 'waarom ook weer?' of 'hoe zat dat?'...

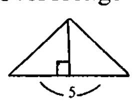
Het kunnen beantwoorden van 'waarom' en 'hoe' vragen vergt echter van de leerlingen een afstand

kunnen nemen, hetgeen een formeel denken vereist waar veel van onze leerlingen veel moeite mee hebben (volgens Piaget 'nog niet aan toe zijn').
Wat minder resp. meer formeel denken inhoud zou ik met Prof. Dr. M. Geensen[6] willen aanduiden met de volgende omschrijvingen:

Een – op een bepaald gebied – minder formeel denkend persoon komt tot oplossing van problemen door zijn ervaringen te ordenen, iets uit te proberen en achteraf te besluiten. In veel gevallen echter ook door gewoon (na)doen.
Een – op een bepaald gebied – meer formeel denkend persoon kan op grond van enkele ervaringen hypothesen opstellen over de realiteit (waaraan begrippen etc. zijn ontleend), zich daarbij richten op mogelijkheden, niet alleen op de werkelijkheid zoals deze zich voordoet.

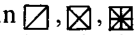
Mede op grond van het voorgaande zou ik – telkens denkend op een schaal van minder naar meer – als kenmerkend voor iemand die op een bepaald terrein formeel kan denken willen noemen, dat hij/zij in staat is om op dat terrein abstract te werken, van belang zijnde factoren kan opsporen, met verhoudingen kan rekenen, systematisch kan werken, uit kan gaan van hypothesen.
Problemen in de wiskundeles hebben – vooral bij 12 tot 16 jarigen – vaak te maken met het feit dat leerlingen met een van deze kenmerken problemen hebben. Ter toelichting laat ik een lijst volgen met korte aanduidingen.

1 Abstract kunnen werken (niet gebonden aan concrete situaties)
voorbeelden:
- werken met letters (variabelen)
- algemene uitspraken kunnen doen
- werken met het begrip oneindig
- werken met begrippen als vector, groep, etc.

2 Van belang zijnde factoren kunnen opsporen
voorbeelden:
- wat is de maximale inhoud die je kunt vouwen van een gegeven stuk papier?
- overbrengen van een hoek met passer en lineaal
- 

wat is de oppervlakte?
- welke – bekende! – gonio formule moet ik bij deze opgave benutten?

3 Met verhoudingen kunnen rekenen
voorbeelden:
- puntvermenigvuldigen
- sin-regel
- recept voor 4 personen in een voor 3 personen omzetten

4 Systematisch kunnen werken
voorbeelden:
- aantal gelijkbenige rechthoekige driehoeken tellen/berekenen in  etc.
- produktverzameling uitschrijven

5 Uit kunnen gaan van een hypothese
voorbeelden:
- stel $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ met p en q relatief gezien
- $x^2 + 5x + 6 = (x \quad)(x \quad)$
- stel de hoek is x, dan is het complement ... dus supplement min complement is ...
-  opp. $= \frac{1}{2} \cdot$ basis $\cdot$ hoogte
- veel '*taal-afspraken*'; (hoogtelijn, macht, richtingsvector)

Ook nu kunnen we weer de vraag stellen: *is hier iets aan te doen*? Anders gezegd- kunnen we als leraar rekening houden met het feit dat sommige leerlingen op bepaalde gebieden (nog?) niet zo formeel kunnen denken als nodig is?

a Piaget-aanhangers zullen aanraden te wachten tot de leerlingen er wel aan toe zijn (uitstellen van bepaalde leerstof, leerstofonderdelen, vraagstellingen). Leraren die in het tweede-kans-onderwijs aan volwassenen lesgeven zullen dit misschien wel willen beamen.

b Skemp en Van Hiele zullen stellen dat we langer moeten werken op het grondniveau en het eerste niveau om daarmee de abstractere wiskunde beter te onderbouwen. Het bewust maken van waar de problemen zitten speelt daarbij een grote rol; hierbij is het samen praten weer een essentiële voorwaarde.
Erg belangrijk is ook het tijd nemen aan het begin van een hoofdstuk, door een start te maken met heel concreet werken. Van Hiele wil in geval van 'niet aanslaan' of moeilijkheden graag even wachten en er dan op terugkomen.[7]
Van Streun[8] adviseert om de leerlingen maar eens te laten proberen volzinnen te vertalen in algebraïsche uitdrukkingen en omgekeerd. Laat de leerlingen veelvuldig grafieken tekenen bij functies en m.b.t. die grafieken redeneringen opzetten, naast

de algebraïsche redeneringen, etc., etc.

c Aanhangers van de ideeën van de Rus Vygotski zullen zeggen: geef de leerlingen gelegenheid te werken in hun zône van naaste ontwikkeling.
Dat wil zeggen: geef hun niet alleen werk te doen dat ze in hun eentje kunnen, maar geef ze vooral ook werk te doen dat ze met een beetje hulp aankunnen. Hierdoor worden ze telkens net iets uitgetild boven hun huidige niveau van functioneren, waardoor cognitieve (verstandelijke) ontwikkeling kan plaatsvinden.
Van belang i.v.m. de motivatie van de leerlingen is daarbij in al deze gevallen dat zij een stukje vertrouwen in eigen kunnen en een realistische kijk daarop kunnen opbouwen. Dit geldt in het algemeen voor iedere leerling en zeker voor die met veel faalangst.

IV Oogkleppen

In zijn eerder aangehaalde artikel spreekt Bos over setvorming door sterke verwachtingspatronen. Als voorbeeld noemde hij o.a. de verwachting dat je bij het berekenen van de afstanden van twee punten de afstandsformule zult moeten toepassen en dat dan ook doet bij de afstand van de punten$(-3, 5)$ en $(7, 5)$. Hij signaleerde de mogelijkheid om dit soort oogkleppenwerk te voorkomen door de leerlingen te dwingen tot concretisering.

We kunnen hen, veel meer dan gebruikelijk is, zelf voorbeelden laten geven en we kunnen veel meer gebruik maken van opgaven van de vorm:
'Welke van de volgende beweringen zijn waar?
Indien onwaar, geef dan een tegenvoorbeeld.'
Dergelijke opgaven komen tegenwoordig wel in alle leerboeken voor, maar naar mijn mening toch nog veel te weinig. Ze kunnen praktisch bij elk onderwerp gemaakt worden.

Het type opgave waar Bos hier op doelt kan uitgebreid worden met opgaven van het type:

- plaats haakjes zodat er een ware bewering staat: $a + 3a + b = 4a + 3b$
- teken een grafiek van een funktie die niet van de eerste graad is en ook niet van de tweede graad
- probeer een oplossing van de volgende vergelijkingen te vinden door proberen
- waarom heeft de volgende opgave een niet-lege oplossingsverzameling?
  Los op in $\mathbb{Z}$: $2x - 3\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2x$

Deze lijst is nog verder uit te breiden; ik zal hier echter volstaan met het aangeven van een tweetal voorbeelden, waarvan het eerste een duidelijke poging is om eenzijdigheid tegen te gaan.

Voorbeeld 1 [9]
Ten behoeve van een *gesprek* over haakjes wel of niet verwijderen legde een hospitant de leerlingen het volgende voor:

Haakjes verwijderen
Reken de volgende sommetjes na:

$(10 + 1)2 = 10 + 12$	$3(7 + 8) = 37 + 8$
$(2 + 7)9 = 2 + 79$	$6(3 + 9) = 63 + 9$
$(5 + 1)3 = 5 + 13$	
$(4 + 10)8 = 4 + 108$	

Je ziet dat de haakjes overbodig zijn. Daarom kunnen we die haakjes net zo goed weglaten. Dat bespaart energie en papier.
Verwijder nu zelf de haakjes

$(6 + 6)6 =$	$6(8 + 4) =$
$(2 + 1)6 =$	$3(6 + 9) =$
$(9 + 1)8 =$	

Ook uit de volgende som blijkt de overbodigheid van de haakjes. Reken na:
$5 + 35 = (5 + 3)5 = 8(2 + 3) = (2 + 3)8 =$
$= 2 + 38 = 40$
$2 + 16 = (2 + 1)6 = 3(5 + 1) = (5 + 1)3 =$
$= 5 + 13 = 18$

Voorbeeld 2 [10]
De afstand van een punt tot een lijn wordt in veel leerboeken voor HAVO en VWO behandeld in het hoofdstuk over vectoren en in een later stadium komt dan een formule (als de lijn gegeven is door een vergelijking). Het gevolg is dat veel leerlingen vanaf dat moment vrijwel blindelings een van beide rekenmethodes kiezen, zonder het gezonde verstand te gebruiken. Het is zinvoller een gesprek te voeren over de verschillende mogelijkheden en hun achtergronden (uiteraard op de momenten dat de leerlingen daar aan toe zijn), zodat er bewust gekozen kan worden.
Daarbij hoort de leerling ook te weten of zijn keuze vertaalwerk vraagt (van vectorvoorstelling naar vergelijking, of omgekeerd) én veel rekenwerk.

Het voorkomen van onnodige rigiditeit is o.a. mogelijk door het bewustmaken van oogkleppen.

Daar bedoel ik mee dat het vaak onnodig is dat de leerlingen op een vast spoor vastgepind worden, of zichzelf pinnen. Maar ook, dat als dat wel gebeurt, ze zich daarvan bewust zijn, dat het een bewuste keuze inhoudt.

V Samenvattend

Negatieve faalangst, het formele denken dat nogal eens vereist wordt, de oogkleppen die leerlingen opgezet gekregen hebben, maar ook gezonde(?) gemakzucht kunnen Einstellung en rigiditeit oproepen en versterken.

Het is beslist niet zo dat wij als wiskundeleraren voor al deze zaken verantwoordelijk zijn. Wel is het zo dat we door de manier waarop we met de leerlingen bezig zijn in het onderwijs hen én onszelf bewust kunnen maken van de bijbehorende verschijnselen. Tevens kunnen we door keuzes duidelijk te motiveren, veel tijd te besteden aan het onderbouwen van begrippen en algoritmen (werken op grondniveau), de verschillende aspecten van formeel denken te helpen ontwikkelen én de leerlingen te helpen een stukje zekerheid op te bouwen een bijdrage leveren aan een plezierig bezig zijn met wiskunde.

Noten

1 In een aantal artikelen in Euclides (56e jrg. en 57e jrg.) heeft S. P. van 't Riet aandacht besteed aan setvorming en de verschijnselen Einstellung en rigiditeit. De reactie daarop van W. J. Bos in Euclides 58 nr. 3 bevatte een aantal waarderende en kritische kanttekeningen, die m.i. echter niet het gehele gebied bestrijken dat in dit verband van belang is.

2 Euclides 59e jrg. nr. 10 en 60e jrg. nr. 2.

3 Zie voor andere voorbeelden o.a., '*Wat bepaalt ons handelen*' (Eucl. 59e jrg. nr. 9) en de vijf artikelen van S. P. van 't Riet (Eucl. 56e jrg. en 57e jrg.) resp. het artikel van W. J. Bos in Eucl. 58e jrg.

4 L. Jonker uit Zeist benut bijvoorbeeld bewust het moeten doorbreken van een vast patroon bij de start van het onderwerp oppervlakte funkties. Juist omdat vaste patronen voor veel leerlingen zo vanzelfsprekend zijn.

funktie	$x \to \frac{1}{4}x^4$	$x \to \frac{1}{3}x^3$	$x \to$	
afgeleide	$x \to x^3$	$x \to x^2$	$x \to x^1$	
	$x \to$	$x \to$	$x \to$	$x \to -\frac{1}{2}x^{-2}$
	$x \to x^0$	$x \to x^{-1}$	$x \to x^{-2}$	$x \to x^{-3}$

Voor verdere voorbeelden zie Eucl. 58 pag. 264, *Verwondering als noodzakelijke voorwaarde voor leren?*

5 In *Van faalangst tot verantwoordelijkheid* zeggen Dr. H. J. M. Hermans, Th. Bergen en R. W. Eijssen o. a. 'In de opvoeding en in het onderwijs is de aanleg, als wij die zouden kunnen vaststellen, een gegeven; het opvoedings- en onderwijsproces echter kunnen wij beïnvloeden en wel zo, dat de negatieve faalangst minder kans krijgt om het leerproces te blokkeren.'

6 Zie Prof. Dr. M. Geensen *De cognitieve ontwikkeling volgens Piaget e.a.* Uitgave van het Ped. Did. Instituut voor de Leraarsopleiding te Utrecht.

7 P. van Hiele, *Begrip en Inzicht* en vele andere publikaties.

8 A. van Streun, *Grafieken gebruiken!*, Euclides 59e jrg. nr. 1. Zie ook H. Broekman, *Grafieken en functievoorschriften*, Euclides 59e jrg. nr. 3.

9 Dit voorbeeld is afkomstig van Van Meeuwen die in zijn natuurkundestage geleerd had de leerstof levendig te maken door praktika, demonstraties e.d. en dit – geïnspireerd door zijn mentor (dhr. H. Bolt) – graag in de wiskundelessen wilde doorzetten.

10 Zie voor een uitvoerige behandeling van dit voorbeeld: *Wat bepaalt ons handelen?*, Eucl. 59e jrg. nr. 9.

Variabelen

Joop van Dormolen

Wat is er zo moeilijk aan variabelen?

Dit opstel heeft de bedoeling de ingewikkeldheid van het begrip variabele doorzichtig te maken, zodat duidelijk wordt waarom veel leerlingen er moeite mee hebben. Daardoor kunnen we wellicht wegen vinden die leerlingen te helpen.
Ik beperk me tot variabelen in de algebra.

Een en ander over begrippen

Omdat ik variabele als een begrip opvat zal ik de vraagstelling ook vanuit begrippen aanpakken. Daartoe ga ik van verschillende begrippen onderzoeken welke gemeenschappelijke kenmerken ze hebben.
Aan een begrip zitten verschillende kanten. Een deel daarvan zit in iemands hoofd als ideeën en voorstellingen, het *interne* deel. Het andere, *externe*, deel kunnen we zien als krabbels op papier of bord, horen als woorden en zinnen of voelen als ijzerdraad, karton of hout. Ik zal dit eerst toelichten aan de hand van het begrip vierkant.

Het interne deel zit in mijn hoofd als deel van een ingewikkeld systeem van kennis over allerlei 'denkdingen':

vierkant	hoeken
vierhoek	rechthoekig
rechthoek	overstaande zijden
parallellogram	overstaande hoeken
zijden	midden van diagonalen ...
diagonalen.	enz.

In het systeem bestaan ook relaties tussen deze denkdingen:

evenwijdig	deel van
even lang	loodrecht op
langer	elkaar snijden ...
korter	enz.

Er zijn ook relaties tussen zulke relaties en denkdingen
als ... dan ...
nodig opdat ... is ...
voldoende voor ... is ...
uit ... volgt ... ... enz.

Verder heb ik nog een beeld van het begrip, ik kan het in gedachten zien. Alles bij elkaar vormt dit het interne deel van het begrip. Niet alles daarvan ben ik me op een bepaald moment bewust. Ik kom hier later nog op terug.
Het interne deel van een begrip is een deel van een cognitieve structuur, dat wil zeggen van alles wat ik weet en in gedachten kan. Die cognitieve structuur hoort bij mij; een ander heeft een andere cognitieve structuur. Hoe rijk die is hangt van iemands ontwikkeling op dit gebied af.
Zelf kan ik wel een beetje met mijn cognitieve structuur omgaan door denken en fantaseren. Maar anderen kunnen mijn cognitieve structuur, die het denkding vierkant bevat, niet waarnemen. Om elkaar te begrijpen moeten we daarom aan het begrip vierkant ook nog externe kanten geven, zoals woorden die we lezen of horen, tekeningen die we zien, voorwerpen die we kunnen betasten. (Trouwens, ik heb die externe kanten ook nodig bij mijn denken en fantaseren.)
Bij het externe deel kan ik drie aspecten onderscheiden:
Er is een of andere *omschrijving* van het begrip. Dat kan een formele definitie zijn, maar het kan ook heel intuïtief van aard zijn, bijvoorbeeld:
'Een vierkant is een rechthoek met gelijke zijden.'
'Een vierkant is een ding dat er zo uitziet.'
'Een vierkant is net zoiets als een cirkel, maar dan recht.'
'Een vierkant is de vorm van een tegel.'
Het externe deel van het begrip bevat ook *voorbeelden*. Dat zijn speciale gevallen die de eigenschappen en kenmerken van het begrip hebben.

In het geval van het vierkant
zoiets als: □

of: ◇

of: □

of: 

of: de figuur die gevormd wordt door de rand van een tegel van mijn badkamer.

Tenslotte is er als extern verschijnsel van een begrip een speciaal *teken*. Soms zijn dat conventionele tekens, zoals het teken voor integraal. Bij het begrip vierkant gebruiken we niet zo'n speciaal teken, maar we moeten wel bedenken dat het woord VIERKANT op zichzelf ook een teken is dat bij het begrip hoort. (Het woord 'betekenis' geeft ook aan dat er aan een begrip een teken is toegekend.)

Samenvattend kan ik het volgende overzicht maken:

BEGRIP	
INTERN	EXTERN
als deel van een cognitieve structuur	waarneembaar als – een omschrijving – een voorbeeld – een teken

Voordat het begrip variabele aan bod komt eerst nog een ander voorbeeld: het begrip modulus.

Evenals bij alle andere begrippen moet ik, om anderen duidelijk te maken hoe dit begrip in mijn hoofd zit, gebruik maken van externe middelen.

– Voor de omschrijving heb ik weer allerlei mogelijkheden:
'Onder de modulus van een getal a versta ik dat getal zelf als het niet-negatief is en het tegengestelde ervan als het negatief is.'
'De modulus is een functie, die niet-negatieve getallen op zichzelf afbeeldt en negatieve getallen op hun tegengestelde.'
'De modulus van a is a als $a \geqslant 0$ en $-a$ als $a < 0$.'
'De modulus is een getal zonder teken.'
'De modulus van een getal is zijn afstand tot nul.'
'De modulus van a is de grootste van de twee getallen a en $-a$.'
– Er zijn twee tekens in gebruik. Het ene is weer het woord zelf: MODULUS, en het andere is het bekende paar streepjes, die aan weerszijden van het getal staan.
– Daarmee kunnen we ook voorbeelden geven: MODULUS 3, MODULUS (-2), $|16.8|$, $|-10000|$, $|0|$, en we weten dan dat dit tekens zijn voor respectievelijk 3, 2, 16.8, 10000 en 0.

Meervoudige betekenis van de externe kant

Misschien hebt u bij uzelf gezegd: 'Waarom gebruikt die man dat woord modulus? Waarom zegt hij niet gewoon absolute waarde? Dan weet ik tenminste direct waar hij het over heeft.'

Als u zoiets heeft gedacht, is het duidelijk dat het teken ABSOLUTE WAARDE een sterkere binding met uw intern deel van het begrip heeft dan het teken MODULUS.

Sommige mensen gebruiken ook wel het teken *abs(   )* in plaats van | |. Voor mij heeft het laatste een veel sterkere binding met mijn intern deel dan het eerste. Ik heb dan ook in het begin niet zo vlot kunnen werken met mijn zakrekenmachine als ik daar bij een absolute waarde nodig had. Het teken *abs (   )* had voor mij nog te weinig be-teken-is, net als voor anderen het teken MODULUS minder (of geen) be-teken-is heeft.

Uit dit laatste voorbeeld, namelijk de modulus (of, als u wilt, absolute waarde) blijkt al hoe ingewikkeld de verschillende externe aspecten van een begrip met elkaar kunnen samenhangen. Ik kon eigenlijk geen voorbeelden van modulus geven zonder er een teken voor te kennen en ik kan ook eigenlijk zo'n voorbeeld niet begrijpen zonder over de een of andere, al is het nog zo primitieve, omschrijving te beschikken.

Heel in het bijzonder is dat te zien aan

$$|a| = \begin{cases} a \text{ als } a \geqslant 0 \\ -a \text{ als } a < 0 \end{cases}$$

Staat hier nu een omschrijving van het begrip, een voorbeeld of een tekencombinatie? Ik zou zeggen van alle drie een beetje. Welke van de drie op een

bepaald moment geaccentueerd wordt hangt af van de omstandigheden waarin het wordt gebruikt:

Bij eenzelfde plaatje kan elk van de drie externe aspecten op een bepaald moment de voorrang hebben.

Bij het vierkant schenen de drie mogelijke externe aspecten nog te kunnen worden onderscheiden in drie verschillende verschijningsvormen. Dat komt (vermoedelijk) omdat we al heel jong met het beeld vertrouwd zijn geraakt en we pas later een omschrijving hebben moeten leren. Bij dieper nadenken komen we echter ook bij een visueel ding als vierkant in moeilijkheden. Is nu dit plaatje echt wel altijd alleen een voorbeeld van een vierkant? Voor mij niet. Het kan in bepaalde omstandigheden ook een teken voor het begrip zijn en zelfs kan het een omschrijving inhouden: zo is een vierkant. Ook bij visuele dingen, zoals meetkundige, streven we op den duur naar *meervoudige betekenis:* we willen op den duur graag dat iemand een plaatje van een vierkant niet alleen als één bepaald voorbeeld van het begrip ziet, maar ook als een teken voor het begrip in het algemeen. En ook hopen we dat dan tegelijk bij het zien van dat teken er een omschrijving van het begrip in iemands gedachten komt, zodat hij er ook mee kan werken. (Dan is het teken een symbool geworden.) We zeggen dan bijvoorbeeld tegen iemand: 'Teken eens een vierkant' en als er iets op papier staat, vragen we naar de een of andere eigenschap van dat vierkant en we verwachten dat de ander dat dan zal opvatten als een eigenschap van het begrip, of, als u dat liever wilt, van alle voorbeelden van het begrip die mogelijk zijn. We bekommeren er ons niet zozeer om of het plaatje dat er komt wel zuiver rechte hoeken heeft en of de lijnen zuiver recht zijn en of de zijden wel precies even lang zijn en of de lijntjes wel mooi dun zijn. Als er iets op papier staat en we vragen naar de een of andere eigenschap, dan verwachten we dat de ander dat zal opvatten als een vraag naar de eigenschap van het begrip en niet van het plaatje.
Samenvattend: woorden en plaatjes zijn verschijningsvormen van een begrip. Een verschijningsvorm kan meer dan één aspect hebben. Welk aspect op een bepaald moment geaccentueerd wordt hangt af van de omstandigheden waarin het begrip gebruikt wordt. Het door elkaar lopen van de aspecten zal gemakkelijker gebeuren naarmate iemand het eraan verbonden begrip beter kent. Bij gemakkelijk visualiseerbare begrippen, zoals meetkundige begrippen, kun je drie aspecten (soms? dikwijls? altijd?) afzonderlijk leren, maar op den duur zullen ze wel door elkaar moeten gaan lopen. Bij niet visualiseerbare begrippen is dat afzonderlijke leren veel moeilijker (onmogelijk?).

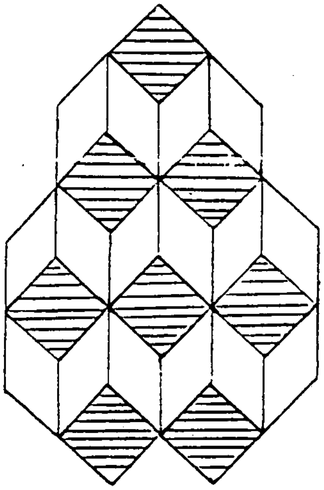
Niet alles tegelijk

Ik merk bij mezelf, en het zal bij u ook wel zo zijn, dat ik de externe aspecten die door een plaatje aangeduid kunnen worden niet tegelijk kan waarnemen. Als ik naar het vierkant op mijn plaatje kijk en als ik dat zie als één bepaald voorbeeld van het begrip vierkant, dan kan ik er op dat moment geen andere dingen in zien. Zoiets is er ook aan de hand als ik kijk naar

$$|-3\tfrac{1}{4}| = 3\tfrac{1}{4}$$

Ik kan er naar kijken als naar een voorbeeld van het begrip modulus. Ik kan er naar kijken als een teken voor het begrip, waarbij ik dan besef dat die '$3\frac{1}{4}$' er niet toe doet, er kan net zo goed '17839,524' staan. Ik kan er ook zo naar kijken dat een of andere definitie van modulus in mij opkomt. Het kost me weinig moeite om van het ene naar het andere aspect over te schakelen, maar ik kan ze niet tegelijk 'zien'. Het is als met die bekende plaatjes waarbij je met je ogen moet knipperen om er iets anders in te zien, bijvoorbeeld het volgende.

Het ene ogenblik zie ik zes blokken waarvan de gearceerde vlakken, behalve de onderste twee, de bovenkant vormen. Maar als ik even met mijn ogen knipper dan zie ik zeven blokken waarvan de gearceerde vlakken, behalve de bovenste, de onderkant vormen. Wie dat niet zo vlug ziet moet dit blad maar eens ondersteboven houden.)
Zulke plaatjes noem ik knipperplaatjes. Escher heeft heel mooie gemaakt.



Intern ook verschillend

Tot nu toe heb ik me niet ingelaten met het begrip als 'denkding'. Ik merk nu alleen op dat eenzelfde verschijningsvorm verschillende betekenissen kan oproepen. Zo kan ik bij vierkant denken aan een logisch opgebouwd stelsel van wiskundig-meetkundige eigenschappen maar ook aan de vele leuke plaatjes die ik ermee zou kunnen maken. Om het alleen bij wiskundige zaken te laten: ik kan er een rijtje meetkundige eigenschappen bij bedenken (zie het lijstje hierboven), of meetkundige relaties, of logische relaties. Ik kan aan een systeem van eigenschappen van meetkundige figuren denken, maar ook aan een systeem van meetkundige afbeeldingen. Het grappige is dat ik heel moeilijk aan al die verschillende dingen tegelijk kan denken. Ook hier lijkt het op een knipperplaatje.
Met de modulus is hetzelfde aan de hand. Ik kan denken aan een functie die uit twee tegengestelde getallen het grootste kiest, of aan een handeling die een getal omzet in zijn tegengestelde als het negatief is en niets doet als het niet-negatief is, of aan 'het teken van het getal afhalen'. Met elk van deze denkdingen hangt een ander (deel van een) cognitief systeem samen. En ook hier geldt het knipperplaatjesidee.
Derde en laatste samenvatting over begrippen:

- Aan een begrip zit een intern en een extern deel.
- Het externe deel heeft drie aspecten: een omschrijving, een voorbeeld of een teken.
- Een en dezelfde verschijningsvorm kan elk van deze drie betekenissen hebben.
- Het is heel moeilijk, zo niet onmogelijk elk van die drie betekenissen tegelijk waar te nemen.
- Als het begrip meerdere interne aspecten heeft, is het evenmin gemakkelijk ze tegelijk te be-denken.

Terug naar het begrip variabele

Als het bovenstaande geldt voor begrippen in het algemeen, dan moet het ook betrokken kunnen worden op het begrip variabele in het bijzonder.
Bekijk het volgende voorbeeld:

$$2x + 3 = 5x - 7$$

Ik kan nu verschillende uitspraken doen. Een ervan is:

'x is de voorlopige naam voor de oplossing van deze vergelijking.'

Ik doe dan net alsof het getal dat de oplossing is door x wordt aangeduid. Daarom kan ik met x rekenen alsof het een getal is, bijvoorbeeld beide leden van de vergelijking met x verminderen. (Ik zou x hier ook liever niet variabele noemen, maar onbekende.)
In dit geval kunnen we de externe aspecten van het begrip variabele als volgt onder woorden brengen:
Als omschrijving: Een tijdelijke *naam* voor een getal, zolang dat getal nog onbekend is.
Als voorbeeld: Een letter in een vergelijking.
Als teken: Het woord VARIABELE (of ONBEKENDE).
Een andere uitspraak is:

'Je kunt allerlei getallen voor x in de plaats zetten. Daarbij moet je je wel aan zekere conventies houden. Eén daarvan is de afspraak, dat als je voor één van de x-en een getal in de plaats zet, je datzelfde getal ook voor alle andere x-en moet schrijven. Een andere conventie is dat je dan voor $2x$ moet lezen: 2 maal het getal dat je voor x in de plaats zet. Analoog voor $5x$.'

In sommige gevallen krijg je na het invullen een onware bewering en wellicht is er ook een getal dat, nadat het voor de x-en in de plaats is gezet, een ware bewering oplevert. De letter x fungeert in de vergelijking als een open plaats, waar getallen ingevuld kunnen worden. Je zou ook kunnen zeggen dat de letter x hier een plaatsbezetter is, die het plekje warm houdt voor getallen, die er zouden moeten staan. In dit geval hebben we voor de externe kant van het begrip variabele:
Als omschrijving: Een *open plaats* waar een getal geschreven moet worden. Het voorbeeld en het teken zijn hetzelfde als in het vorige geval.

Ik constateer dat er bij de variabele, net als bij modulus en vierkant, sprake is van een dubbel 'knipperplaatje'. Extern zie ik afwisselend een teken en een voorbeeld en, door middel van de vergelijking $2x + 3 = 5x - 7$, ook nog als een verkapte omschrijving. Intern denk ik afwisselend aan de voorlopige naam van een nog onbekend getal dat ik nog niet ken en aan een plaatsbezetter die plaats voor een getal, het doet er niet toe welk, openhoudt.
Het volgende voorbeeld $2x + 3 > 5x - 7$ lijkt me op het eerste gezicht gemakkelijker dan de bovenstaande vergelijking, omdat hier alleen het open-plaats-karakter bij mij wordt opgeroepen.
Ik moet enige moeite doen om te knipperen naar het naam-karakter, door te bedenken:
'x is de voorlopige naam van een of ander getal dat aan de ongelijkheid voldoet.' Ik vind dat niet zo'n gekke manier van denken en moet er dan ook rekening mee houden dat er mensen zijn bij wie het naam-karakter eerder opkomt dan het open-plaats-karakter.
Anders wordt het bij beweringen die waar zijn voor elke waarde van de variabele(n), bijvoorbeeld

$$(a - 5)(a + 5) = a^2 - 25$$

Als we ons verdiepen in de vraag of inderdaad voor elke waarde van a dit een ware bewering oplevert, dan dringt zich de open-plaats-omschrijving op, maar als we het antwoord op deze vraag willen bewijzen, bijvoorbeeld door de vorm $(a - 5)(a + 5)$ uit te vermenigvuldigen, dan doen we ineens net alsof a de naam van een of ander getal is (of we gaan rekenen met open plaatsen volgens formele regels).
Nog ingewikkelder wordt het bij

$$x^2 - ax + x + a^2$$

Een vraag hierbij zou kunnen zijn:
Voor welke waarden van a is deze vorm definiet positief (d.w.z. positief voor elke waarde van x)?
Zowel a als x zijn voorbeelden van het begrip variabele en we kunnen zowel voor a als voor x beide omschrijvingen gebruiken. Maar toch zijn het verschillende soorten tekens door de aard van de vraagstelling.
Om dit goed te begrijpen moet ik weer terug naar het eerste voorbeeld $2x + 3 = 5x - 7$. Daar werd eigenlijk een heel merkwaardige gedachtengymnastiek van mij gevraagd. Enerzijds moet ik, beginnend bij de vergelijkingen aan het rekenen gaan om tenslotte er $x = 3\frac{1}{3}$ uit te krijgen, maar anderzijds moet ik een gedachtenproef doen: Doe net alsof je het getal al kent en ga dan met dat getal rekenen. In gedachten moet ik dus op twee manieren tegelijk werken: Op papier werk ik van de vergelijking uit en doe daar verschillende dingen mee en in gedachten werk ik tevens vanaf de andere kant, net alsof ik het getal al weet.

Iets dergelijks is er steeds aan de hand bij het werken met meer variabelen. In het bijzonder bij de vraag over het definiet zijn. De vraag begint met 'Voor welke waarden van a ...'. Het antwoord daarop is dus in feite het gevraagde eindprodukt. Maar ik moet me tegelijk inbeelden, dat ik al zo'n waarde heb. Ik moet net doen alsof ik al een getal voor a gekozen heb, (maar ik mag dat niet in werkelijkheid doen.)
Na de (gefantaseerde) keuze van a kan ik verder. Ik ga nu naar x kijken. Ik doe net alsof a een getal is waarvoor de vorm inderdaad definiet positief is. Dat wil ik dan wel even controleren. Dat kan ik doen door voor de discriminant te bepalen:

$$(-a + 1)^2 - 4a^2 < 0$$

Ik had al gedaan alsof ik voor a een getal had gekozen, dus ik kan daarmee gewoon rekenen:

$$a^2 - 2a + 1 - 4a^2 < 0$$
$$-3a^2 - 2a + 1 < 0$$
$$3a^2 + 2a - 1 > 0$$
$$(a + 1)(3a - 1) > 0$$
$$a < -1 \vee a > \tfrac{1}{3}$$

Ik kan nu de conclusie trekken:
voor elke $a < -1$, of elke $a > \frac{1}{3}$ is
$x^2 - ax + x + a^2$ definiet positief.
Zelf spring ik in mijn knipperplaatje van 'a als naam voor een getal' naar 'a als open plek voor een getal', maar er zijn ook mensen die bij deze uitspraak blijven denken aan a als naam van een getal, maar telkens van een ander getal.

Dit is niet het enige dat problematisch voor leerlin-

gen is. Het is ook moeilijk je te realiseren dat je met een opgave als boven eigenlijk op verschillende denkvlakken bezig bent. Eerst denk je over x na. Je schept jezelf als het ware een context waarin x de hoofdpersoon is. Het doet er nu even niet toe of dat als naam of als open plaats is.

> CONTEXT VAN x:
> Er wordt iets gezegd over x

Vervolgens zeg je iets over a. Je breidt de context uit. Bij iedere waarde van a behoort een context van x.

> CONTEXT VAN a:
> Er wordt iets gezegd over een uitdrukking waarvan de vorm van a afhangt
>
> > CONTEXT VAN x

In elk van deze contexten kan de variabele opgevat worden als naam of als open plaats. Je hebt zo al vier combinaties.

Het is nu te begrijpen waarom iemand die dit soort opgaven vlot heeft leren maken, ineens problemen krijgt met de vraag:

Is $x^2 - xy + x + y^2$ definiet positief (d.w.z. positief voor elke waarde van x en y)?
Hier worden immers x en y gelijkwaardig in één context gezet.

> CONTEXT VAN x en y:
> Er wordt iets gezegd over een uitdrukking die van x en y afhangt

Om het probleem op te lossen moet terug gegaan worden naar een gecombineerde context:

> CONTEXT VAN y:
> Er wordt iets gezegd over een uitdrukking die van x afhangt
>
> > CONTEXT VAN x

of:

> CONTEXT VAN x:
> Er wordt iets gezegd over een uitdrukking die van y afhangt
>
> > CONTEXT VAN y

We kunnen het onze leerlingen nog moeilijker maken door variabelen in drie denkvlakken te schakelen. Bijvoorbeeld in:
Wat kun je zeggen over de verzameling lijnen met vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}?$$

> CONTEXT VAN a:
> Er wordt iets gezegd over een lijn waarvan de stand van a afhangt
>
> > CONTEXT VAN V:
> > Er wordt iets gezegd over een verzameling vectoren
> >
> > > CONTEXT VAN x en y:
> > > Er wordt iets gezegd over een vector

Betekenis voor het onderwijs

Ik heb een paar complicaties laten zien die aan het begrip variabele vastzitten. Op grond van deze analyse wil ik een paar aanbevelingen doen voor het onderwijs van alledag.

In het algemeen zouden we kunnen zeggen: een leraar zou het onderwijs zo moeten inrichten dat hij in elk geval zelf goed weet met welk aspect en in welk denkvlak er op een bepaald moment gewerkt wordt. Dat besef vermindert de kans dat voor een leerling die nog niet in staat is een en ander zelf te ontwarren, de hele boel door elkaar gaat lopen.
Meer concreet kunnen we zeggen:
Plaats de leerstof en de oefeningen in een duidelijke context.
Toelichting: Een opdracht als: 'Los op $2x + 3 = 5x + 7$' laat verschillende mogelijkheden open. Je kunt x zien als naam van een bepaald, maar nog onbekend, getal; je kunt x opvatten als een open plaats waar je elk getal mag invullen en waarbij het in dit speciale geval, blijkens de tekst 'Los op', gaat om dat getal (die getallen) die na invulling van de vergelijking een ware bewering maakt (maken). Je kunt je ook helemaal niet bekommeren om x en alleen een aantal formele handelingen uitvoeren en opschrijven, bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 5x + 7 \\ 2x &= 5x + 4 \\ -3x &= 4 \\ x &= -\tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Door de vergelijking in een zekere context te plaatsen kunnen we de aandacht op een van de aspecten richten. Willen we bijvoorbeeld het naamkarakter benadrukken dan zouden we kunnen vragen: 'Voor een zeker getal x geldt: $2x + 3 = 5x - 7$. Welk getal is x?'
Als we de aandacht willen richten op het open plaats karakter zouden we kunnen vragen: 'Spoor alle getallen x op die geheel zijn en waarvoor $2x + 3 = 5x - 7$.'
Een paar opmerkingen:

- Ik ben hier bewust binnen een wiskundige context gebleven. Men kan natuurlijk ook een niet-wiskundige instap gebruiken.
- Het gaat hier om het leren begrijpen wat een variabele is. Wie dat al enigszins te pakken heeft kan natuurlijk best opdrachten krijgen als 'Los op ...'
- Ik heb geen voorkeur voor het beginnen met het naamkarakter of het open plaats karakter.

Hoofdzaak is dat de onderwijsgevende zich ervan bewust is dat op een bepaald moment de nadruk op een van beide ligt.
Een ander voorbeeld: 'Voor welke waarden van a is $x^2 - ax + x + a^2$ definiet positief?' Het interpreteren van deze zin eist nogal wat ervaring en begrip van de onderscheiden rollen van de beide variabelen. We zouden dat voor beginners in het vak wat kunnen richten. Ik stel me voor dat ik iets zou kunnen zeggen of schrijven als:

'Ik wil dat je iets vertelt over $x^2 - ax + x + a$? Ik zal zodadelijk de vraag stellen. Eerst nog wat informatie. a is een of ander getal. Bijvoorbeeld $a = 6382\frac{529}{871}$. Dan staat er $x^2 - (6382\frac{529}{871}) \cdot x + x + (6382\frac{529}{871})^2$. Maar je mag elk ander getal in gedachten nemen. Het doet er nu nog niet toe welk. Laten we dat getal maar gewoon a blijven noemen.'

Ik heb dan een 'context van a' gemaakt en a duidelijk gemarkeerd als naamgever. Ik kan nu verder gaan.

'Als je nu allerlei verschillende getallen voor x invult in de uitdrukking $x^2 - ax + x + a^2$, dan krijg je getallen die positief zijn, negatief zijn, of nul zijn.'

Ik heb x nu als open plaats gemarkeerd. Nu kan ik de vraag stellen:

De vraag is nu: 'Wat moet ik voor a nemen om alleen maar positieve getallen te krijgen, wat ik ook voor x invul?'

Een paar opmerkingen.

- Ik heb me beperkt tot wat voor dit artikel relevant is. Het is natuurlijk best mogelijk dat een en ander nog door voorbeelden moet worden toegelicht. Zo kan ik me een onderwijsleergesprek voorstellen waarbij er op den duur op het bord staat:
- Ook nu ben ik binnen de wiskunde geweest en laat ik de vraag naar de zinvolheid van de opgave buiten beschouwing.
- Ik kan me ook situaties indenken waarbij a juist open plaats is en x de naam van een getal.

$x^2 - ax + x + a^2$			
keuze van a	uitdrukking in x	getallen voor x	resultaat
4	$x^2 - 3x + 16$	0	16, positief
		1	14, positief
		2	14, positief
		-345	120076, positief
		$\frac{1}{17}\sqrt{13}$	15,408709, positief
$-\frac{1}{2}$	$x^2 + 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$, positief
		-1	$-\frac{1}{4}$, negatief
		2	$7\frac{1}{4}$, positief
		$\frac{1}{17}\sqrt{13}$	0,613120, positief
		$-\frac{1}{17}\sqrt{13}$	$-0{,}023154$, negatief
$-\frac{1}{17}\sqrt{13}$	$x^2 + 1{,}212091x + 0{,}044983$	0	0,044983, positief
		-1	$-0{,}167109$, negatief
		-2	1,620800, positief

Besluit

Door speciale maatregelen kunnen leraren (en auteurs van teksten) de aandacht van hun leerlingen richten op een bepaald aspect van het begrip variabele. Ik meen dat dat van belang is als de leerlingen nog bezig zijn het begrip te verwerken. Die maatregelen houden in dat het probleem in een bepaalde context geplaatst wordt. Daarnaast is het taalgebruik van de docent van groot belang. Door woorden als '*Neem voor* p *het getal* 36' wordt het naamaspect benadrukt, terwijl '*Vul voor* p *het getal* 36 *in*' meer wijst naar het open-plaats-karakter.

Op den duur zullen veel leerlingen gehulpen worden als ze expliciet de verschillende aspecten van het begrip variabele leren kennen. We moeten onze didactiek niet geheim houden als we onze leerlingen een beter inzicht kunnen geven. Ik weet niet op welk ogenblik een leraar het zijn leerlingen zou kunnen vertellen.

Leren en reflecteren in het wiskunde-onderwijs II

Fred Korthagen

1 Inleiding

In een vorig nummer van Euclides heb ik de hoofdlijnen van een theorie van Skemp (1979) over leren en reflecteren uiteengezet. Zoals beloofd, zal ik deze keer een aantal toepassingen van die theorie aangeven. Voordat ik daaraan begin is een korte samenvatting van het vorige artikel (Korthagen, 1983/84) wellicht nuttig.
Uitgangspunt van Skemps theorie is, dat het menselijk handelen bestuurd wordt door interne *stuursystemen*. Een belangrijk onderdeel van een stuursysteem is een *cognitief schema*, dat is een samenhangend kennisgeheel. (Men denke aan een taxichauffeur die een kaart van de stad in z'n hoofd heeft.) Wanneer het individu een bepaald doel wil bereiken, dan wordt zo'n schema getransformeerd tot een actieplan (bijv. een plan voor een route door de stad). Met behulp van dit actieplan wordt, via voortdurende feedback vanuit de waargenomen actuele situatie, het handelen bestuurd.
Leren wordt opgevat als het verbeteren van stuursystemen. Een basisprincipe van de theorie van Skemp is nu, dat het verbeteren van een stuursysteem door een tweede, intern stuursysteem bestuurd wordt (dat is als het ware een motortje voor het leren). Het eerste type stuursystemen (dat zorgt voor de direkte interactie tussen het individu en de omgeving) heet *delta-één*, het tweede type (de stuursystemen die het leren sturen) heet *delta-twee*. Veel leren vindt plaats zonder bewust denken op delta-twee-niveau. Is dat wèl het geval, dus wordt er bewust nagedacht over het functioneren van de eigen delta-één-systemen, dan spreek ik van *reflecteren*.

Verder is het *zoomlensprincipe* ter sprake gekomen. Dit is het principe dat een mens de eigen schema's op verschillende manieren kan gebruiken. Er is sprake van *inzoomen* als de persoon let op de details uit een schema. *Uitzoomen* betekent dat de persoon let op de grote lijnen of zelfs een heel schema als één begrip hanteert.

2 Verbanden met de onderwijspraktijk

a Het motivatieprobleem
Eén van de meest duidelijke uitgangspunten van het delta-één/delta-twee-model is, dat het leren van de leerling bestuurd wordt door interne systemen binnen die leerling. Dat relativeert de mogelijkheden die de leraar heeft om 'kennis over te dragen'. Informatie kan nu eenmaal niet rechtstreeks van het hoofd van de leraar in het hoofd van de leerling overstromen, of, zoals Rogers (1969, p. 103) zegt: '*Teaching, in my estimation, is a vastly over-rated function*'.
In plaats van over 'onderwijzen' spreek ik dan ook liever over 'helpen leren'. Dat betekent bijv. dat 'uitleggen' alleen zin heeft als de leerling een probleem of een vraag heeft en dus een *eigen leerdoel*, dat is een doel op delta-twee-niveau. (Dit is dus mijn antwoord op de door Ralph van Raay (1983/84) in Euclides gestelde vraag in welke gevallen 'uitleg' een goede vorm van onderwijs kan zijn.)
In het reguliere onderwijs krijgt de leerling echter ook te maken met doelstellingen die anderen gekozen hebben. Daar zijn goede argumenten voor, maar we moeten ons realiseren dat hiermee tevens het motivatieprobleem wordt binnengehaald:

> 'The young human being is intrinsically motivated to a high degree. Many elements of his environment constitute challenges for him. He is curious, eager to discover, eager to know, eager to solve problems. A sad part of most education is that by the time the child has spent a number of years in school this intrinsic motivation is pretty well-dampened' (Rogers, 1969, p. 131).

b Activeren en motiveren
Het delta-één/delta-twee-model biedt echter ook aanknopingspunten om met dit motivatieprobleem om te gaan. De leraar kan meer doen dan alleen maar afwachten en aansluiten bij de leerbehoeften van de leerling. Volgens het delta-één/delta-twee-model ontstaan leerbehoeften van-

uit de interactie met de omgeving. (Men denke aan de taxichauffeur die ontdekt dat hij niet goed de weg weet in een bepaalde wijk.) Die omgeving van de leerling kan door de leraar beïnvloed worden! Er is echter meer nodig dan het meenemen van boeiend materiaal, het kiezen van interessante (instap)problemen en het aanbieden van contextrijke wiskunde. Pas vanuit de confrontatie met het niet-adequaat functioneren van een eigen delta-één-systeem ontstaat een leerdoel en wordt delta-twee geactiveerd. Dat betekent dat *motivatie* pas kan ontstaan vanuit *activatie*.

Ik heb de ervaring dat beginnende leraren, maar ook meer ervaren onderwijsmensen, veel mogelijkheden tot activeren, m.a.w. tot het opstarten van het delta-één/delta-twee-systeem laten liggen. Lessen beginnen bijv. vaak met een mondelinge verwijzing van de leraar naar de vorige les en vervolgens wordt een stuk stof behandeld. De activering van de leerlingen komt pas bij de oefenopgaven of in het huiswerk. Bij veel leerlingen ontstaan in die fase pas leerbehoeften ....

Een les kan ook beginnen met een klein opdrachtje aan alle leerlingen, bijv. om een bepaald vraagstukje op te lossen. De leraar kan rondlopen en zien op welke punten de stuursystemen van de leerlingen inadequaat functioneren en daar vervolgens in zijn les bij aansluiten.

Samenwerking van leerlingen zorgt ook voor activering; al gaat het maar om het twee-aan-twee bespreken van een huiswerkopgave. Het *doel* van zo'n activiteit moet echter wel duidelijk zijn voor de leerlingen. Dat volgt ook uit het delta-één/delta-twee-model.

In schoolboeken blijft het activeren van de leerlingen soms eveneens beperkt tot het geven van oefensommen. Nu is het ook moeilijk om als auteur van eèn schoolboek erg veel beslissingen te nemen over de inrichting van de onderwijssituatie. Terecht wordt dat dikwijls aan de leraar overgelaten. Die leraar gaat er echter vaak vanuit dat het boek wel didaktisch verantwoord geschreven zal zijn, dus dat er weinig meer aan toe te voegen is ....

Bram Lagerwerf geeft in het 11e hoofdstuk van zijn boek 'Wiskunde-onderwijs nu' (Lagerwerf, 1982) een aantal inspirerende voorbeelden van manieren waarop de leraar die werkt met een gewoon wiskundeboek, de leerlingen actief kan maken. Het leerlingmateriaal van het IOWO en van OW & OC geeft uiteraard ook vele voorbeelden. Eén kanttekening is daarbij nog op z'n plaats. Als je leerlingen actief maakt, kun je niet altijd met 100 % zekerheid voorspellen dat er leerbehoeften opkomen en *waar* de leerlingen op gericht raken. Je zult er als leraar rekening mee moeten houden dat er wel eens interesses kunnen ontstaan waar het materiaal dat klaar ligt, nu net niet bij aansluit. Ook van het meest fraaie pakketje kunnen in dat opzicht geen wonderen verwacht worden. Creativiteit en inzet van de leraar zijn voorwaarden voor succesvol helpen leren.

c Het zoomlensprincipe in de klas

Het zoomlensprincipe herinnert ons aan het belangrijke vermogen van de mens om snel achter elkaar van perspectief te wisselen. Dit vermogen is noodzakelijk om tegelijkertijd een plan (bijv. voor het oplossen van een wiskundeprobleem) voor ogen te houden èn bij de uitvoering van dat plan op de details te letten. In de klas is het niet voldoende om rijke cognitieve schema's bij de leerlingen te ontwikkelen; leerlingen moeten ook getraind worden in het gebruik van de zoomlens. Bij het klassikaal bespreken van een oplossing kan hierop bijv. de nadruk gelegd worden door het plan in grote lijnen op het bord te zetten en bij de uitvoering ervan steeds heen en weer te springen tussen die grote lijnen en de details. Bij het programmeren van de computer is de noodzaak van zo'n aanpak nog duidelijker door de genadeloze manier waarop fouten door de machine worden gesignaleerd.

Ook bij toetsen of bij controle-momenten tijdens de les kan de nadruk gelegd worden op verschillende instellingen van de zoomlens. Vaak wordt uitsluitend gelet op de vaardigheid om concrete voorbeelden correct op te lossen. Ik denk daarnaast aan vragen als

- Leg uit wat het verband is tussen logaritmische en exponentiële functies.
- Laat zien met welke verschillende methoden je de vergelijking $x^2 + 2x - 8 = 0$ kunt oplossen.
- Maak m.b.v. een plaatje duidelijk wat het verband is tussen raaklijnen aan een grafiek en de afgeleide van een functie.
- Wat zijn de voor- en nadelen van de begrippen gemiddelde en modus?

d Hoe kan reflectie gestimuleerd worden?

Reflectie door de leerling op eigen wiskundige activiteiten is een krachtig middel om het leren te versnellen of te verbeteren. In termen van ons model: delta-twee gaat de verbetering van delta-één gericht sturen.

Reflectie heeft echter geen zin als er niet voldoende concrete ervaringen aan vooraf gegaan zijn.

Als de leerlingen wel actief geweest zijn met een wiskundige activiteit, dan kan de leraar reflectie stimuleren d.m.v. vragen als:

- wat heb je (hebben jullie) gedaan? (reflectie op het handelen)
- waarom heb je (hebben jullie) het zo aangepakt? (reflectie op het doel)
- kan het ook anders? (reflectie op de paden)
- hoe kun je (kunnen jullie) jezelf controleren? (stimuleren van de interne feedback)
- wat heb je (hebben jullie) geleerd? (reflectie op het delta-één-schema)
- wat wil je (willen jullie) nog meer aan dit onderwerp doen? (activering van de stuurfunctie van delta-twee!)
- wil je (willen jullie) nu liever verder gaan met dit onderwerp of met dat? (eveneens activering van delta-twee)

Uiteindelijk zouden de leerlingen zichzelf dergelijke vragen moeten gaan stellen. Hun vermogen om zichzelf te controleren en bij te sturen (interne feedback) wordt daardoor ontwikkeld en de afhankelijkheid van externe feedback verminderd. Het gaat hier dus om het leren leren.

Om dit te bereiken is het niet voldoende dat de leraar voorbeeldgedrag vertoont door geregeld vragen zoals de bovenstaande te stellen. Het nut van dergelijke vragen kan bijv. ook expliciet met de leerlingen besproken worden. Daarbij moet wel rekening gehouden worden met weerstanden: als je als leerling gericht bent (geraakt) op het zo snel mogelijk vinden van een oplossing, lijken reflectievragen meer storend dan helpend.

Er zijn overigens ook praktische moeilijkheden: om 'samenvatten' tot een zinvolle bezigheid te maken, zou je de samenvatting die in het boek van de leerlingen staat, soms liever kwijt dan rijk zijn.

e Reflectie bij de afsluiting van een leerpoces

De afsluiting van een les of van een onderwerp is uiteraard vaak een natuurlijk moment voor reflectie. Bij het verwerken van een nieuw stuk stof behoort m.i. niet alleen oefenen en toepassen, maar ook bezinning op de essentie van dat stuk stof, op hoofd- en bijzaken, op verbanden binnen dat stuk stof en op de relatie met andere stukken wiskunde. Een leuke manier om een dergelijke reflectie op gang te brengen is bijv. de vraag aan leerlingen om een proefwerk op te stellen. Als het te riskant lijkt om de leerlingen een ècht proefwerk voor elkaar te laten maken, dan zou het doel het opstellen van een proef-proefwerk kunnen zijn.

Reflectie door de leerlingen op de eigen cognitieve schema's zorgt niet alleen voor verbetering van die schema's. Het is ook een noodzakelijke voorwaarde voor het op een hoger niveau kunnen omgaan met de stof, zoals dat bijv. vereist is bij het geven van een bewijs.

Verder is er een niet onbelangrijk affectief aspect. Het leren in de wiskundeles is niet altijd even leuk. Zelfs wiskundestudenten aan de universiteit (die gekozen hebben voor het vak wiskunde) gaan vaak door diepe dalen bij het bestuderen van de collegestof. De bevrediging komt vaak na afloop van een moeizaam leerproces: ik heb het tòch doorgekregen, kijk eens wat ik nu weer allemaal méér weet en kan, dat geeft de burger moed!

Op school krijgen leerlingen vaak weinig tijd voor dit 'nagenieten'. De leraar is maar al te blij dat de stof voor het einde van het lesuur behandeld is en àls er tijd overblijft wordt die graag benut om een stapje verder te gaan. Leerlingen krijgen dan ook vaak het gevoel een trap te moeten beklimmen, waarbij na elke trede weer een nieuwe verschijnt en waarop je nooit eens mag blijven stilstaan om van het uitzicht te genieten ....

Hetzelfde gevaar doet zich voor als het reflectieniveau te hoog gekozen wordt. Dan is reflectie geen middel om datgene wat je weet en kunt nog eens te overzien, maar leidt het uitsluitend tot een confrontatie met dingen die je niet begrijpt. Een manier om dit gevaar te vermijden is het echt over het delta-één-niveau te hebben met de leerlingen, d.w.z. over de vraag hoe en in welke situaties je de nieuwe opgedane kennis *gebruikt* (en waar je dan voor moet oppassen). Dat hoeft niet in abstracte termen te gebeuren; ook bij de samenvatting van een stuk stof zijn voorbeelden belangrijk.

f Taalniveaus
Dat brengt me op het taalgebruik van de leraar. Delta-één-taal is doe-taal of voel-taal, delta-twee-taal is denk-taal. Denk-taal behoeft niet vermeden te worden, maar er zijn allerlei tussenvormen mogelijk. Ik herinner me nog goed dat ik op school braaf uit mijn hoofd leerde: 'de logaritme van een getal is de exponent waartoe men het grondtal moet verheffen om dat getal te verkrijgen'. Wat ik ècht dacht en onthield bij het begrip logaritme, was dat $^{2}\log 2^{3} = 3$. Wellicht had ik de mooie volzin ook echt tot iets van mezelf kunnen maken als ik eerst meer tijd had gehad om met het begrip logaritme te *werken*, d.w.z. op delta-één-niveau bezig te zijn.
Onlangs sprak ik iemand bij wie de wiskunde-deur voorgoed was dichtgegaan toen zijn leraar (N.B. in het beroepsonderwijs!) hem probeerde te overtuigen van het feit dat twee evenwijdige lijnen elkaar in het oneindige snijden. Nu, meer dan 10 jaar na deze gebeurtenis, was de (diploma-loze, werkloze) man nòg verontwaardigd over deze mening van zijn wiskundeleraar: het kenmerk van evenwijdige lijnen is toch juist dat ze elkaar nooit snijden?
Dezelfde man vertelde trouwens dat in een bedrijf, waar hij gewerkt had, een cilinder gemaakt moest worden met een inhoud van precies 50 cc. Er was niemand in het bedrijf die wist hoe de maten van zo'n cilinder berekend konden worden ....

g Reflectie en feedback bij samenwerking van leerlingen
Reflectie wordt vaak op een natuurlijke wijze gestimuleerd door leerlingen te laten samenwerken. Net als Freudenthal geloof ik dat heterogene groepjes in dit opzicht extra voordelen bieden. Eén leerling krijgt iets door en wordt, om het aan de anderen te kunnen uitleggen, a.h.w. gedwongen tot reflectie:
'*De sprong in het leerproces kan een hoger* niveau *betekenen, in een zin die ik, uitgaande van het werk van de Van Hieles, verder heb ontwikkeld: een activiteit op het lager niveau* beoefend, *wordt op het hoger niveau* bewust *een onderwerp van beschouwing; ordeningsmiddelen van lager niveau worden op hoger niveau onderwerp van het ordenen*'. (Freudenthal, 1976, p.2; zie ook Freudenthal, 1978.)
Door de samenwerking is men gedwongen om bewuster bezig te zijn. Daardoor wordt ook de *interne feedback* gestimuleerd: je gaat jezelf meer controleren en eventueel bijsturen als je anderen wilt vertellen hoe je denkt. Vanzelfsprekend zijn er ook meer mogelijkheden voor *externe feedback* dan bijv. bij frontaal onderwijs: leerlingen controleren en verbeteren elkaar. Zie voor boeiende voorbeelden van leerprocessen in heterogene groepjes Dekker (1982) en Dekker, Herfs & Terwel (1983).
Veel van de genoemde voordelen worden overigens al duidelijk bij voorzichtige vormen van samenwerking, bijv. als leerlingen in tweetallen het huiswerk bespreken, en ook bij klassegesprekken, mits het lukt om iedereen daarbij te betrekken.

h Ook de leraar moet kunnen reflecteren
Het ging hierboven steeds over het leren en reflecteren van *leerlingen*. In Korthagen (1983) wordt het delta-één/delta-twee-model in de eerste plaats behandeld in het kader van het leren en reflecteren door (a.s.) *leraren*. De gedachte is dat er nu eenmaal vaak weinig hulp en begeleiding meer wordt gevonden als men eenmaal leraar is; men mag het meestal zelf uitzoeken. Dat betekent dat men in staat zou moeten zijn om het eigen lesgeven te evalueren en om zichzelf binnen het beroep te ontwikkelen .... Een niet geringe eis!
Mag ik hier een klein beginnetje maken? De vragen die onder *d* werden genoemd in het kader van het stimuleren van de reflectie van *leerlingen*, kunnen ook door de leraar gebruikt worden bij het reflecteren op zijn of haar eigen handelen. Men vervange het woord 'onderwerp' door 'probleem' of 'leuke ontdekking'.

3 Reflectie op het delta-één/delta-twee-model

Wellicht bent u in dit artikel een aantal principes tegengekomen die niet zo erg nieuw klonken. De kracht van de theorie van Skemp ligt dan ook niet zozeer in het feit dat ons een geheel nieuwe kijk op onderwijs wordt gegeven, als wel in de integratie van verschillende bestaande inzichten en theorieën. Skemps theorie is a.h.w. een overkoepelend cognitief schema en biedt als zodanig veel voordelen: we kunnen reeds beschikbare modellen beter 'begrijpen' (d.i. inpassen in een aanwezige kennisstruc-

tuur) en onderling verbinden. Zo kwamen in dit artikel en in het vorige de niveautherorie van Van Hiele aan de orde en begrippen als inzicht, vaardigheid, lokaal en globaal perspectief, doelen, motivatie, activeren, zelfcontrole door de leerling feedback, reflectie en wiskundig taalgebruik. We komen op deze manier een stapje dichterbij wat Freudenthal (1978) een nog niet bestaande 'science of mathematical education' noemt.
Aan de andere kant heeft Skemps model natuurlijk ook zijn beperkingen. Het blijft een vereenvoudiging van de werkelijkheid en als zodanig beschrijft het niet de hele werkelijkheid. Zo blijft onduidelijk wat de rol van onbewuste processen is en hoe precies verschillende stuursystemen op elkaar inwerken. Verder rijst de vraag hoe men de 'persoonlijkheid' van het individu in het model kan terugvinden. Moet er misschien aan een soort delta-drie gedacht worden? (Zie ook het laatste hoofdstuk van Skemp, 1979.) Door dergelijke beperkingen maakt de beschreven theorie soms een wat mechanistische of simplistische indruk. Het is echter onjuist te stellen dat Skemp een mechanistische visie op het menselijk functioneren zou hebben. Het probleem is veeleer dat het delta-één/delta-twee-model op diverse punten nog verder uitgewerkt moet worden. De theorie van Skemp heeft in ieder geval als voordeel boven veel andere leertheorieën dat talloze aspecten van het menselijk functioneren met elkaar in verband gebracht worden en dat de theorie dicht genoeg bij de onderwijspraktijk zit om vruchten af te kunnen werpen voor de vrouw of man in de klas.

Referenties

Dekker, R.: '*Wiskunde en heterogeniteit*'. In: Nieuwe Wiskrant, 1e jaargang, nr. 4 (mei 1982), p. 43-50.

Dekker, R., Herfs, P. & Terwel, J.: *Wiskunde voor iedereen, interimrapport project interne differentiatie wiskundeonderwijs 12-16*, Vakgroep onderwijskunde Rijksuniversiteit Utrecht, 1983.

Freudenthal, H.: '*Differentiatie binnen het wiskunde-onderwijs*'. In: Wiskrant, 1e jaargang, nr. 2 (februari 1976), p. 1-2.

Freudenthal, H.: *Weeding and sowing, preface to a science of mathematical education*. Dordrecht, 1978.

Korthagen, F. A. J.: *Leren reflecteren als basis van de lerarenopleiding, een model voor de opleiding van leraren, in het bijzonder wiskundeleraren*. 's-Gravenhage, 1983 (SVO-reeks, nr. 67).

Korthagen, F. A. J.: '*Leren en reflecteren in het wiskundeonderwijs I*'. In: Euclides 60 (1984/85), 2, p. 94 e.v.

Lagerwerf, B.: *Wiskundeonderwijs nu*. Groningen, 1982.

Van Raay, R.: '*Uitleg: een uitnodiging tot meedenken*'. In: Euclides 59 (1983/84), p. 177-179.

Rogers, C. R.: *Freedom to learn*. Columbus, Ohio, 1969. Nederlandse vertaling: *Leren in vrijheid*. Haarlem, 1973.

Skemp, R. R.: *Intelligence, learning and action*. Chichester (etc.), 1979.

'Naar aanleiding van . . .'

Luc Kuijk

De sectie wiskunde van de Stichting Leerplan Ontwikkeling publiceert een boekje met deze titel in een serie waarin resultaten worden beschreven die het leerplanontwikkelingswerk oplevert. In dit geval het onderwerp: werken van leerlingen in (kleine) heterogene-groepen, zoals de ondertitel luidt. Een schooljaar lang hebben SLO-medewerkers zeer intensief leerlingen op een brede scholengemeenschap (LBO-MAVO-HAVO-VWO) in Deventer geobserveerd, die in bewust heterogeen samengestelde groepjes werkten aan de hand van speciaal daarvoor geschreven leerstofpakketjes: bevindingen zijn in dit boekje samengevat.
Wie dit boekje aandachtig bestudeert, dus méér doet dan alleen het vaak gebruikelijke 'geïnteresseerd doorbladeren', komt belangwekkende zaken tegen. Na het inleidende hoofdstuk volgt een beschrijving van de wijze waarop de leerlingengroepjes opdrachten uitvoeren, en daarbij krijgen lezers zicht op observatie-categorieën met betrekking tot de (onderlinge) aktiviteiten, nl. 'sfeer', 'samenwerken'; bij dit laatste kan sprake zijn van: hulp-geven, hulp-ontvangen, even-voor-zichzelf, passief-gedrag, afhaken.
Met betrekking tot het proces van probleemoplossen hanteert men de fasen: 'eigen maken', 'brainstorm' en 'verwoorden', waarbij dan bij de overgang naar een volgende fase de 'knipperbol' weer is ingevoerd die we op straat hebben afgeschaft. Dit alles geïllustreerd met voorbeelden van leerlingenteksten en lesprotocollen.
Via het belang van klassikale momenten voor het uiteindelijke leer-effect komen we in het volgende hoofdstuk, dat de leraar in het vizier neemt: tips voor leraren bij het voorbereiden van lessen met heterogene groepjes, een beschrijving van wat je nu

als leraar tijdens zo'n les uitspookt: 'voorbereidende klassikale momenten', 'hulp-aan-groepjes', c.q. 'koppelende-klassikale-momenten', en 'reflecterende-klassikale-momenten', weer met voorbeelden en tips.
Het werken met heterogene groepjes heeft sterke relatie met de wens (?) – het hoge woord moet eruit – de differentiatieproblematiek verder naar een oplossing te brengen. In hoofdstuk vier wordt deze problematiek aan een analyse onderworpen. De tot nu toe 'officiële' differentiatiemodellen worden onder de loep genomen, met steeds als conclusie dat één model op zich het heil niet bracht. Het idee van verschillende niveau's (Freudenthal) in leerprocessen en in oplossingen binnen de heterogene groepjes levert een nieuwe kijk op differentiatie (of beter: 'verschillen tussen leerlingen positief gebruiken').
In het laatste hoofdstuk 'zoomen' we dan nog verder 'uit': de projectgroep 12-16 van de SLO schetst een aantal opvattingen en uitgangspunten die op dit moment ten grondslag liggen aan hun leerplan-ontwikkelings-werk, waarbij als algemeen beeld naar voren komt dat de lijn van IOWO/WISKIVON wordt doorgetrokken.
'Punten' die op dit moment voor de SLO als 'oriëntering' moeten dienen in een gedeeltelijk in kaart gebracht terrein zijn dan: – vertrekken vanuit de wereld van de leerling – wiskunde die voor iedereen nodig is – mathematiseren – zinvolle wiskunde.
Het boekje is netjes uitgevoerd, en zeer goed leesbaar: zowel wat betreft taalgebruik: geen bla-bla jargon maar nuttige en directe formuleringen, als wat lay-out betreft: duidelijke indeling, en behulpzame trefwoorden in de marge.
De auteurs zeggen met deze publicatie een discussie in brede kring los te willen maken, en hopen op steun voor hun opvattingen. Daaraan ontleent ondergetekende dan ook het recht – naast alle waardering – een aantal kritische detailopmerkingen te laten horen.
Op een aantal plaatsen worden stromingen of tendensen gesignaleerd ('verdergaande heterogenisering van groepen leerlingen in het voortgezet onderwijs' – pagina 5, 'terugdringing selectieve werking van het vak wiskunde' en 'belangrijke verschuiving in opvattingen omtrent aard, vorm en inhoud van het wiskundeonderwijs' – pagina 79, 'natuurlijke verschillen tussen leerlingen in positieve zin exploiteren' – pagina 93) waar bij nadere beschouwing de auteurs alleen zichzelf citeren of anderen in de (kleine) spraakmakende gemeente van vakdidactici en leerplanontwikkelaars: hier is wellicht de wens de vader van de gedachte geweest.
Ook wordt nogal eens bij de lezer een zekere 'vakdidactische belezenheid' verondersteld: weet iedereen wat 'Belvia' en wat een T-huisje is? (Neen, geen thee-huisje) en wat 'mentaal handelen', 'demonstratieve taal'?
Ook bij de noten komt dat nogal eens voor. Van de 'knipperbollen' in hoofdstuk 2 wordt bij no. 1 wel wat gezegd over het hanteren ervan, over de wijze waarop je met knipperbol 2 als leraar en klas het beste omgaat zijn de auteurs m.i. erg summier.
De laatste pagina van hoofdstuk 4 over de activiteiten-groepen is onduidelijk.
Ja, en dan: de context en de (belevings)wereld. Op pagina 81 wordt het probleem gesignaleerd dat (tot nu toe) de leerlingen meestal de wiskunde niet goed kunnen toepassen. Dit is een algemeen probleem, een speciaal geval is bijv. het functioneren van wiskunde binnen andere (school)vakken als natuurkunde, economie. De auteurs zoeken de oplossing echter in contexten nabij de belevingswereld van leerlingen. Is 'zich in een situatie inleven' hetzelfde als 'je bezig houden met een probleem uit je belevingswereld?'. Niet alle zinvolle contexten zullen binnen de belevingswereld van alle leerlingen te plaatsen zijn.
De uitspraak (pagina 87) dat 'binnen contextrijk wiskunde-onderwijs alle leerlingen immers de gelegenheid krijgen nieuwe probleemsituaties te verkennen, aan te pakken en op te lossen' is dan ook alléén waar als men de nadruk legt op de zinsnede 'gelegenheid krijgt'. Daarmee is nog niet alle problematiek opgelost. De auteurs geven dat zelf ook toe, als ze op pagina 96 de onderzoeksvraag stellen 'hoe lang het mogelijk en wenselijk is contextrijk wiskunde-onderwijs in (kleine) heterogene leergroepen te realiseren?' Al te gemakkelijk worden op pagina 108 en 109 de uitgangspunten 'vertrekken vanuit de wereld van de leerling' en 'wiskunde die voor iedereen nodig is', in elkaars verlengde geformuleerd. Misschien zijn die uitgangspunten wel eens wat minder onderling verdraagzaam. De leraren die op het vwo met HEWET aan de gang gaan zullen daar spoedig ook over kunnen melden.

Het boekje eindigt met een uitgangspunt 'zinvolle wiskunde' dat echter nogal algemeen is, weinig uitgewerkt. Zullen we dit slot van het boekje dus maar beschouwen als een aanbeveling naar de lezers om deel te nemen aan de D-conferentie van het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde?
Veel ter sprake gebrachte punten in het boekje vragen om een vervolg, in leerplan-ontwikkeling en -onderzoek. Wie met verbetering van wiskunde-onderwijs begaan is kan dit boekje worden aanbevolen, hij/zij zal na lezing (en gebruik?) naar zo'n vervolg uitzien.

Of en òf

P. G. J. Vredenduin

De aanleiding tot dit artikel

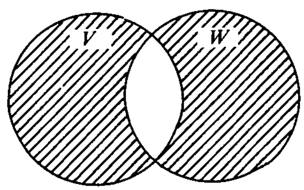
In de spreektaal komt het inclusieve 'of' slechts sporadisch voor. Leerlingen hebben er dan ook soms moeite mee.
Twee voorbeelden om het verschil te verduidelijken tussen het inclusieve of en het exclusieve òf.

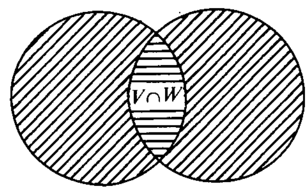
a Een gastvrouw gaat rond met een schaal met appels en peren en zegt tegen een gast: je mag een appel nemen of een peer.
Hier is 'of' kennelijk exclusief bedoeld. De gast neemt zich de vrijheid het inclusief op te vatten. Hij mag dan minstens één van de twee nemen en neemt een appel en een peer. De gevolgen laten zich gemakkelijk raden.

b Een employé zegt tegen zijn chef: als de trein te laat is of de brug open is, dan kom ik te laat; anders ben ik op tijd.
Ditmaal is 'of' kennelijk inclusief bedoeld. Op een zekere dag komt de employé te laat en zegt tegen zijn chef: het spijt me, maar de trein was te laat en de brug was ook nog open. Zijn chef heeft het 'of' exclusief opgevat en zegt: dan had je op tijd moeten zijn.

Het inclusieve 'of' duikt in de wiskundeles op bij het definiëren van de vereniging van twee verzamelingen.
$x \in V \cup W$ betekent: x is element van V of element van W.
Dit wil zeggen dat x òf element is van alleen V òf element van alleen W òf element van beide.
Dit doet voor kinderen een beetje dikdoenerig aan. Vandaar dat bij het schrijven van een bekend schoolboek een collega de volgende, ietwat simpeler explicatie koos:

$x \in V \cup W$ wil zeggen, dat x element is van V òf van W òf van beide.
Ik klom ogenblikkelijk in de gordijnen. Hetzij element van V, hetzij van W, hetzij van beide is een wonderlijke opsomming, want het is uitgesloten dat het derde geval (wel element van beide, maar niet van V en niet van W) zich voordoet.
Mijn collega vroeg me nog even beneden te komen. En hier begint de aanleiding die me ertoe bracht iets voor Euclides te schrijven. Zijn uitleg was als volgt.
Praat nu eens even niet over 'hetzij'.
Ik spreek af:
'p òf q is waar' betekent: precies één van de twee uitspraken p en q is waar.
'$x \in V$ òf $x \in W$' correspondeert dus met het bovenste venn-diagram.



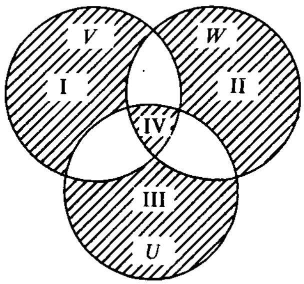


Nu ($x \in V$ òf $x \in W$) òf $x \in V \leqq W$.
Kijk naar het onderste venn-diagram. Hier moet x element zijn van de schuin gearceerde verzameling òf van de horizontaal gearceerde doorsnede. Dit

levert juist de vereniging van V en W op en die moesten we hebben. Tableau!
Misschien denkt u dat het hem ligt aan de haakjes. Maar als die ergens anders gezet worden, verandert het resultaat niet. Hoe is dit wonderlijke resultaat te verklaren?

Het symmetrisch verschil

De verzameling van de elementen die alleen element zijn van V of alleen van W wordt doorgaans het *symmetrisch verschil* van V en W genoemd.
Notatie: $V \Delta W$.
Het onderste venn-diagram op de vorige bladzijde is dus het venn-diagram van $V \Delta W$.
Nu het venn-diagram van $(V \Delta W) \Delta U$.



Dit bestaat uit vier delen:

I bevat elementen die wel tot $V \Delta W$ behoren, maar niet tot U

II eveneens

III bevat elementen die wel tot U behoren, maar niet tot $V \Delta W$

IV eveneens.

Het deel IV bevat de elementen die zowel tot V als tot W als tot U behoren.
De operatie Δ is commutatief en associatief, zoals uit het diagram blijkt. We mogen dus onder weglating van haakjes schrijven: $V \Delta W \Delta U$. Dit is de verzameling van de elementen die tot precies één van de verzamelingen V, W en U behoren of tot alle drie.
Meer algemeen vinden we door middel van volledige inductie:
$V_1 \Delta V_2 \Delta \ldots \Delta V_n$ is de verzameling van de elementen die tot een oneven aantal van de verzamelingen $V_1, V_2, \ldots, V_n$ behoren.
Nu terug naar de wonderlijke explicatie betreffende de vereniging van twee verzamelingen.

$V \Delta W \Delta (V \cap W)$ is de verzameling van de elementen die tot een oneven aantal van de verzamelingen V, W en $V \cap W$ behoren.
Deze verzameling bestaat uit

a de elementen die tot precies één van deze drie verzamelingen behoren, en die vormen $V \Delta W$, en

b de verzameling van de elementen die tot alle drie de verzamelingen V, W en $V \cap W$ behoren, en die vormen $V \cap W$.

Samen is dat juist $V \cup W$.
De door mijn collega gedefinieerde operator 'òf' werkt op uitspraken precies zoals de operator Δ op verzamelingen werkt.
Mijn collega heeft 'òf' zo gedefinieerd dat 'p òf q' hetzelfde betekent als 'hetzij p, hetzij q'.
Consequentie daarvan is echter dat
'p òf q òf r' niet hetzelfde betekent als 'hetzij p, hetzij q, hetzij r'.
Vandaar dat hij me vroeg nog even beneden te komen en niet over 'hetzij' te praten.
U begrijpt dat ik na dit alles begrepen te hebben toch weer in de gordijnen klim.

Toegift over uitspraken

We hebben gezien dat Δ een binaire, commutatieve en associatieve operatie op verzamelingen is. De hiermee corresponderende binaire operatie 'òf' op uitspraken is dus eveneens commutatief en associatief.
Dit bracht mij op de gedachte na te gaan welke binaire operaties op uitspraken die commutatief en associatief zijn, er nog meer zijn. Het resultaat van dit onderzoek zal een duidelijker licht werpen op de perikelen rond 'òf'.
Er zijn zestien binaire operaties op uitspraken. Ze worden gekarakteriseerd door de zestien verschillende waarheidstabellen. Van deze zestien vallen er al direct acht af, omdat ze niet commutatief zijn. De overblijvende acht willen we onderzoeken.

a

p_1	p_2	resultaat
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Het resultaat van deze operatie is een *tautologie*.

b

p_1	p_2	resultaat
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Het resultaat is een *contradictie*.

c

p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Interpretatie van $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ is waar: *alle uitspraken $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zijn waar.*

d

p_1	p_2	$p_1 \vee p_2$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Interpretatie van $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ is waar: *minstens één van de uitspraken $p_1, p_2, \ldots, p_n$ is waar.*

e

p_1	p_2	$p_1 \uparrow p_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Interpretatie van $p_1 \uparrow p_2 \uparrow \ldots \uparrow p_n$ is waar: *een oneven aantal van de uitspraken $p_1, p_2, \ldots, p_n$ is waar.* Bewijs met volledige inductie.

Dit geval correspondeert met het symmetrisch verschil van verzamelingen. Voor $n = 2$ valt de interpretatie van $\uparrow$ samen met 'of'.

f

p_1	p_2	$p_1 \downarrow p_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

De interpretatie van $p_1 \downarrow p_2$ is: p_1 en p_2 zijn ekwivalent. Evenmin echter als de interpretatie 'of' houdbaar is voor $\uparrow$ in $p_1 \uparrow p_2 \uparrow \ldots \uparrow p_n$ $(n > 2)$ is de interpretatie 'ekwivalent' houdbaar voor $\downarrow$ als $n > 2$.
Ik bewijs nu door middel van volledige inductie:
Stelling. De interpretatie van $p_1 \downarrow p_2 \downarrow \ldots \downarrow p_n$ is: *een even aantal van de uitspraken $p_1, p_2, \ldots, p_n$ is onwaar.*

Bewijs. Voor $n = 2$ is de bewering juist.
We tonen nu nog aan:
als de bewering juist is voor $p_1 \downarrow p_2 \downarrow \ldots \downarrow p_i$
en voor $q_1 \downarrow q_2 \downarrow \ldots \downarrow q_j$
dan is de bewering ook juist voor
$(p_1 \downarrow p_2 \downarrow \ldots \downarrow p_i) \downarrow (q_1 \downarrow q_2 \downarrow \ldots \downarrow q_j)$
We onderscheiden vier gevallen:

1	Van $p_1, \ldots, p_i$ zijn er een even aantal onwaar $p_1 \downarrow \ldots \downarrow p_i$ is waar	van $q_1, \ldots, q_j$ zijn er een even aantal onwaar $q_1 \downarrow \ldots \downarrow q_j$ is waar

Dan is $(p_1 \downarrow \ldots \downarrow p_i) \downarrow (q_1 \downarrow \ldots \downarrow q_j)$ waar en zijn er een even aantal van $p_1, \ldots, p_i, q_1, \ldots, q_j$ onwaar.

2	Van $p_1, \ldots, p_i$ zijn er een even aantal onwaar $p_1 \downarrow \ldots \downarrow p_i$ is waar	van $q_1, \ldots, q_j$ zijn er een oneven aantal onwaar $q_1 \downarrow \ldots \downarrow q_j$ is onwaar

Dan is $(p_1 \downarrow \ldots \downarrow p_i) \downarrow (q_1 \downarrow \ldots \downarrow q_j)$ onwaar en zijn er een oneven aantal van $p_1, \ldots, p_i, q_1, \ldots, q_j$ onwaar.

3	Van $p_1, \ldots, p_i$ zijn er een oneven aantal onwaar Gaat analoog.	van $q_1, \ldots, q_j$ zijn er een even aantal onwaar
4	Van $p_1, \ldots, p_i$ zijn er een oneven aantal onwaar $p_1 \downarrow \ldots \downarrow p_i$ is onwaar	van $q_1, \ldots, q_j$ zijn er een oneven aantal onwaar $q_1 \downarrow \ldots \downarrow q_j$ is onwaar

Dan is $(p_1 \downarrow \ldots \downarrow p_i) \downarrow (q_1 \downarrow \ldots \downarrow q_j)$ onwaar en zijn er een even aantal van $p_1, \ldots, p_i, q_1, \ldots, q_j$ onwaar.
Hiermee is het bewijs voltooid.
Nu heb ik voor de puzzelaars nog een verrassing in petto.
Ik kan op precies dezelfde manier aantonen:
Stelling. De interpretatie van $p_1 \downarrow p_2 \downarrow \ldots \downarrow p_n$ is: *een even aantal van de uitspraken $p_1, p_2, \ldots, p_n$ is waar.*
Ik hoef dan alleen maar in de tweede en de vijfde regel van de vier gevallen 1, 2, 3 en 4 'onwaar' te vervangen door 'waar'.
Het is echter uitgesloten dat beide stellingen juist zijn. Proberen geeft alras dat de tweede niet klopt. Maar waar zit de fout in het bewijs?
Zie de rubriek recreatie in dit nummer.
Ten slotte blijven er nog twee mogelijkheden over.

g

p_1	p_2	resultaat
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

h

p_1	p_2	resultaat
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Men overtuigt er zich gemakkelijk van dat deze twee operaties niet associatief zijn.

Conclusie

a In onze taal betekent p òf q òf r (meestal geschreven: p of q of r): hetzij p, hetzij q, hetzij r. Dit is waar als precies één van de drie uitspraken p, q en r waar is.
Het blijkt echter dat (p òf q) òf r en p òf (q òf r) een andere betekenis hebben. Ze zijn ook waar, als p, q en r alle drie waar zijn.

b In onze taal betekent $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$: de drie uitspraken p, q en r zijn alle drie ekwivalent. Een dergelijke aaneenschakeling van ekwivalenties is in de schoolwiskunde gebruikelijk. Denk maar aan het oplossen van vergelijkingen.
Het blijkt echter dat $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$ en $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ een andere betekenis hebben. Ze zijn ook waar als p en q onwaar zijn en r waar. Meer algemeen als twee van de drie uitspraken p, q en r onwaar zijn en de derde waar. Maar als p, q en r alle drie onwaar zijn, zijn deze uitspraken juist niet waar, terwijl p, q en r wel onderling ekwivalent zijn.

c Daarom corresponderen $\uparrow$ en $\downarrow$ niet met aaneenschakeling van resp. òf en $\Leftrightarrow$.

Wiskunde = denken

Wiskundig Nederland, let op uw saeck!

Gijs Piret

De overheid wil graag met ingang van 1986 objectief scoorbare toetsen hebben bij de MAVO- en LBO-examens. Onlangs is het CITO om advies gevraagd. Voor wiskunde antwoordde men: 'De meeste elementen van de examenprogramma's kunnen met behulp van gesloten vragen worden getoetst, met uitzondering van de doelstellingen 'het kunnen tekenen van grafieken' en 'het kunnen geven van een wiskundige gedachtengang'. Door gebruik te maken van een grote variëteit van gesloten vragen kan 80% van het examen uit gesloten vragen bestaan. Voor het toetsen van de overige vaardigheden hebben open vragen de voorkeur.'
Rustig kan worden aangenomen dat beide bovengenoemde doelen (*tekenen* en *denken*) straks uit het examen gehaald worden en in het schoolonderzoek worden weggemoffeld. Even rustig kan worden aangenomen dat na het LBO en het MAVO ook het HAVO en het VWO een objectief scoorbare beurt krijgen.
Van afstand bezien is het bovenstaande een onderdeel van een bredere ontwikkeling. In de zestiger jaren was het boek *Vijven en zessen* van A. D. de Groot een krachtige oproep om leerlingen die goed over dingen hadden nagedacht niet het slachtoffer te laten worden van de willekeur van een beoordelaar. Het boek en de auteur stonden vervolgens aan de wieg van het CITO. Dat CITO helpt op de hierboven beschreven wijze bij het plegen van een aanslag op de ontwikkeling van menselijk denken. Althans, het verzet zich niet tegen pogingen menselijk denken te beperken tot objectief scoorbare reacties op vragen.
Met andere woorden: de bedoeling van De Groot destijds (voorkomen dat denken slachtoffer wordt van willekeur) dreigt de meest eenvoudige uitwerking te krijgen: ban het denken uit, dan wordt het zeker geen slachtoffer van willekeur.
Cynisch?
Maar niet ondenkbaar!
Ik doe een dringend beroep op alle wiskundeleraren in Nederland en in het bijzonder op het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren om tegen bovengenoemde ontwikkeling met klem te protesteren. Accepteren van de CITO-uitspraak is er mee akkoord gaan dat wiskunde geen krachtig hulpmiddel is bij het menselijk denken; is er mee akkoord gaan dat wiskunde verwordt tot een verzameling Pavlov-reacties.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 Hn Doorwerth

Opgaven

518 In het artikel 'Of en of' in dit nummer komt een bewijs voor waarin kennelijk een fout zit. Gevraagd wordt de fout op te sporen.
Bij wijze van uitzondering vindt u de oplossing reeds in dit nummer afgedrukt.

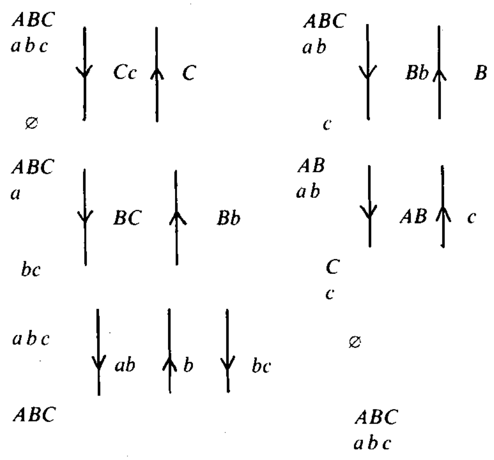
519 16 punten zijn de hoekpunten van 9 vierkanten met zijde 1 die samen een vierkant vormen met zijde 3. De 16 punten moeten door een wegennet van minimale lengte verbonden worden zo, dat elk punt vanuit elk ander punt bereikbaar is. Gevraagd de lengte van dit wegennet.

520 In een vierkante kaas zitten gaten. Probeer de kaas te verdelen in stukken begrensd door convexe veelhoeken die elk precies één gat bevatten. De gaten moeten niet te grillig zijn; denk ze daarom puntvormig.

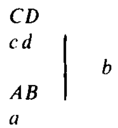
521 Op een eilandje in het midden van een cirkelvormig meer staat een vuurtoren. Een motorboot wil van de oever van het meer naar het eiland varen met constante snelheid. Het licht van de vuurtoren roteert met eenparige hoeksnelheid. De motorboot wil niet in het licht van de vuurtoren komen. Gevraagd de kleinste snelheid (eigenlijk: de onderste grens van de snelheid) waarmee dit mogelijk is. Kies de straal van het meer 1 km en neem aan dat het licht van de vuurtoren in 1 minuut 1 keer roteert. Denk het eiland puntvormig.

Oplossing

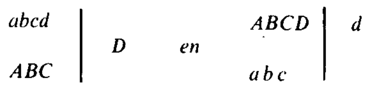
516 Drie echtparen moeten in een boot een rivier oversteken. De boot kan slechts twee personen bevatten. Geen dame mag in gezelschap van een heer gelaten worden zonder dat haar man daarbij aanwezig is. Hoe geschiedt de overtocht?
Noem de heren A, B en C en de dames a, b en c. De overtocht kan als volgt plaats hebben.



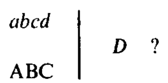
Toelichting. Eerst zijn A, B, C, a, b, c aan de ene kant en is niemand aan de andere kant. Dan gaan Cc in de boot, c gaat aan land en C roeit terug. Daardoor ontstaat de situatie: aan de ene kant A, B, C, a, b, en aan de andere kant c, Enz.
Nu met vier echtparen. Dan lukt dat niet. We bekijken de situaties waarbij drie personen aan de overzijde zijn. Bijv.



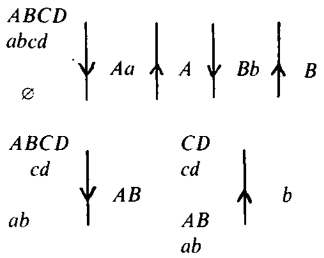
Wat kan er nu gebeuren? De enige mogelijkheid is dat b naar de overzijde roeit en B mee in de boot neemt. Dan gaan we echter over van 3 personen aan de overkant naar 2 personen. Zo komen we dus niet verder.
Andere mogelijkheden zijn:



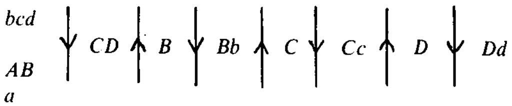
In het eerste geval wordt d door D opgehaald, samen stappen ze aan de overkant aan wal. Dan roeit C terug en haalt c op. Idem B resp. A en wordt de overtocht tot een goed einde gebracht. Het tweede geval is steriel.
Twee personen in de boot geeft geen nieuwe gezichtspunten.
De vraag blijft dus over: hoe bereiken we de situatie



Dat lukt niet. Want te voren zouden er meer dames dan heren aan de beginkant zijn. En dat is niet oirbaar.
Merkwaardig is dat de interpretatie van de woorden 'gelaten worden' hier een rol speelt. Als we toelaten dat een dame in 'onoirbaar' gezelschap van een heer verkeert, mits die heer maar ogenblikkelijk in de boot stapt, is de overtocht wel mogelijk, namelijk zo:



Nu stapt b aan wal en stappen C en D in de boot. We krijgen:



met het resultaat:

∅

ABCD
abcd

En dan maar met 5 echtparen proberen.

517 De leden van een vereniging komen elke week bijeen. Gemiddeld zijn per keer 50% van de leden aanwezig. Het aanwezig zijn van leden zijn onafhankelijke gebeurtenissen. Is de kans dat twee leden elkaar op een bijeenkomst ontmoeten, gemiddeld $\frac{1}{4}$?

Onderstel de kans dat A_i aanwezig is, is

$p_i = \frac{1}{2} + a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Hierin is $\sum_i a_i = 0$.

De gemiddelde kans dat twee leden elkaar ontmoeten, is

$$p = \frac{1}{\frac{1}{2}n(n-1)} \sum_{i<j} (\tfrac{1}{2} + a_i)(\tfrac{1}{2} + a_j)$$

Nu is

$$2\sum_{i<j} (\tfrac{1}{2} + a_i)(\tfrac{1}{2} + a_j) = \sum_{i,j} (\tfrac{1}{2} + a_i)(\tfrac{1}{2} + a_j) - \sum_i (\tfrac{1}{2} + a_i)^2 =$$

$$= n^2 \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\sum_i a_i + \tfrac{1}{2}\sum_j a_j + \sum_{i,j} a_i a_j - \sum_i (\tfrac{1}{2} + a_i)^2 =$$

$$= n(n-1) \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 0 + 0 - \sum_i (\tfrac{1}{2} + a_i)^2 + n \cdot \tfrac{1}{4}$$

Waaruit volgt

$$p = \tfrac{1}{4} - \frac{1}{n(n-1)} \sum_i a_i^2$$

dus in het algemeen minder dan $\frac{1}{4}$.

A_i en A_j zien elkaar gemiddeld eens in de $\frac{1}{(\frac{1}{2} + a_i)(\frac{1}{2} + a_j)}$ dagen.
Als $a_i \neq a_j$, maak dan a_i en a_j gelijk onder behoud van hun som. Dan wordt $\frac{1}{(\frac{1}{2} + a_i)(\frac{1}{2} + a_j)}$ kleiner. Als $a_i = 0$ voor elke i, dan zullen twee leden elkaar gemiddeld eens in de vier weken ontmoeten. In het algemeen zal deze tijd groter zijn.

518 Het ging om de volgende stelling.
De interpretatie van $p_1 \downarrow p_2 \downarrow \ldots \downarrow p_n$ is: een even aantal van de uitspraken $p_1, p_2, \ldots, p_n$ is onwaar.
Het bewijs geschiedde met volledige inductie.
Inductiestart: voor $n = 2$ is de bewering juist.
Inductiestap:
als de bewering juist is voor $p_1 \downarrow p_2 \downarrow \ldots \downarrow p_i$
en voor $q_1 \downarrow q_2 \downarrow \ldots \downarrow q_j$
dan is de bewering ook juist voor
$(p_1 \downarrow p_2 \downarrow \ldots \downarrow p_i) \downarrow (q_1 \downarrow q_2 \downarrow \ldots \downarrow q_j)$
Dus: als de bewering juist is voor $n = i$ en voor $n = j$, dan is ze ook juist voor $n = i + j$.
Zet nu het inductieproces in gang. Kies $i = 2$ en $j = 2$. De bewering blijkt dan juist te zijn voor $n = 4$. Kies $i = 4$ en $j = 2$, dan blijkt de juistheid voor $n = 6$. Enz. De juistheid voor even n is hiermee verzekerd.
Nu nog de oneven waarden van n. Om deze te bereiken, moeten we het geval $i = 1$ bekijken. Daarvoor geldt:
als van de verzameling uitspraken $\{p_1\}$ er een even aantal onwaar zijn, dan is p_1 waar;
als van de verzameling uitspraken $\{p_1\}$ er een oneven aantal onwaar zijn, dan is p_1 onwaar.
De inductiestap is dus ook verantwoord, als $i = 1$. Waarmee het bewijs voltooid is.
Nu de foutieve stelling.
De interpretatie van $p_1 \downarrow p_2 \downarrow \ldots \downarrow p_n$ is: een even aantal van de uitspraken $p_1, p_2, \ldots, p_n$ is waar.
Het begin van het bewijs blijft onveranderd. Voor even n is dus ook deze bewering juist. Geen wonder, want voor even n wil 'een even aantal waar' hetzelfde zeggen als 'een even aantal onwaar'.
Nu het geval $i = 1$. Daarvoor geldt:
als van de verzameling uitspraken $\{p_1\}$ er een even aantal waar zijn, dan is p_1 onwaar
als van de verzameling uitspraken $\{p_1\}$ er een oneven aantal waar zijn, dan is p_1 onwaar.
Hier gaat het dus mis.
Het spreekt vanzelf, dat we een korter en fraaier bewijs verkrijgen door direct de inductiestap van n naar $n + 1$ te kiezen, d.w.z. direct ons te beperken tot $i = 1$.

Jaarrede 1984

Dames en heren,

Bij de opening van een jaarvergadering heeft een voorzitter altijd het recht en de plicht terug te zien op het afgelopen jaar en tevens melding te maken van toekomstige ontwikkelingen.
De docenten aan VWO en HAVO zullen het meest geïnteresseerd zijn in het jaarlijkse overzicht van de stand van zaken bij de HEWET.
Ruim 50 scholen nemen thans deel aan het experiment met wiskunde A en B in de top van het VWO. Op 12 van die scholen zal dit jaar het allereerste examen wiskunde B worden afgenomen, een examen dat slechts 25% zal afwijken van het wiskunde-I examen: in plaats van de opgave over waarschijnlijkheidsrekening en statistiek zal het B-examen een opgave over ruimtemeetkunde bevatten. Diezelfde 12 scholen nemen dit jaar deel aan het examen wiskunde A, dat alweer voor de derde maal wordt afgenomen. Is de steekproef van de leerlingen aan de 2 scholen van het eerste uur representatief geweest voor de steekproef van de 12 scholen, dat is de (spannende) vraag...
Intussen heeft iedere VWO-school in Nederland op de een of andere manier te maken met HEWET. Zo'n 800 van onze collega's nemen dit jaar actief deel aan de nascholing. Het HEWET-team heeft een compleet net van nascholingsplaatsen over ons land gelegd. Het kader van docenten voor de 32 cursussen bestaat uit lerarenopleiders van universiteit en NLO. Ook zijn enige docenten van experimenteerscholen ingeschakeld. De coördinatie, organisatorisch en inhoudelijk, wordt verzorgd door de vakgroep OW & OC.
Niet geheel onverwacht bleek de belangstelling voor de HEWET-cursussen groot, te groot. Voor de niet-geplaatsten komt er zeker nog een tweede, wellicht een derde nascholingsronde.
De scholen die niet hebben deelgenomen aan de experimenten krijgen dit jaar voor het eerst te maken met de, niet eenvoudige, keuzeproblematiek in 4 VWO. In het afgelopen jaar heeft het HEWET-team acht voorlichtingsbijeenkomsten in het land gehouden en alle scholen hebben in maart de brochure 1985 ontvangen. Om de scholen te laten profiteren van de ervaringen van de deelnemers van het experiment zal de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren in samenwerking met het HEWET-team, zes bijeenkomsten organiseren op 14 en 17 januari 1985. De eerste drie bijeenkomsten (dus op 14 januari) zijn in Bergen op Zoom, Heerenveen en Rotterdam. Drie dagen later zijn we in Amsterdam, Apeldoorn en Roermond. Aankondigingen hiervan zullen te vinden zijn in Euclides, de Nieuwe Wiskrant en het NGL-weekblad. Op de bijeenkomsten zullen betrokkenen van experimenteerscholen aanwezig zijn om vragen te beantwoorden. Ervaringen en strategieën van een aantal experimentscholen zijn op papier gezet en zullen op die bijeenkomsten worden verspreid.
Een andere HEWET-aktiviteit van de vereniging is het samenstellen van een bundel opgaven wiskunde A, van verschillende niveaus tot examenniveau. Deze bundel verschijnt begin 1985.
Contacten tussen onze vereniging en de Nederlandse Vereniging van Schooldecanen hebben er toe geleid dat in een aantal decanenkringen voorlichting aan schooldecanen over wiskunde A en B is en wordt gegeven; ook hierbij wordt weer gebruik gemaakt van de know-how van de experimenteerscholen.
Met spanning zien we uit naar het advies dat de in februari jongstleden ingestelde HAVO-commissie zal uitbrengen over een tweedeling van de wiskunde in de HAVO-bovenbouw. De commissie, die zich uitvoerig heeft laten voorlichten over de wiskundewensen van de diverse HBO-opleidingen ziet zich geplaatst voor de lastige taak programma's te ontwerpen die niet volgens het theezakjes-principe uit de nieuwe VWO-programma's zijn afgeleid, maar toch een goede aansluiting bewerkstelligen. Het rapport dient voor het einde van dit schooljaar te worden uitgebracht, op een moment waarop er misschien wat meer duidelijkheid is over de toe-

komstige structuur van het VWO/HAVO, ofwel het nieuwe lyceum.
Over dit nieuwe lyceum bereiken ons steeds andere geruchten met betrekking tot de nieuwste plannen van de Staatssecretaris. Het blijkt dat zij een groot voorstandster is van wiskunde voor alle leerlingen. Ons bestuur vindt de tijd nog niet rijp om wiskunde als verplicht examenvak in te voeren. Voordat wiskunde verplicht examenvak kan worden moet er nog veel gebeuren. Niet alleen een wiskunde A en B op het VWO en een tweedeling van wiskunde op HAVO, maar vooral ook een meer op de belangstelling van de leerlingen gericht leerplan voor de onderbouw en voor MAVO en LBO. Het bestuur heeft dan ook de Staatssecretaris verzocht voorlopig van haar voornemen om wiskunde als examenvak verplicht te stellen af te zien en eerst een onderzoek te laten instellen naar leerplannen voor LBO, MAVO en onderbouw VWO en HAVO.
Uit het antwoord van de Staatssecretaris citeer ik het volgende: 'Mijn opvatting is, dat een verplichting van wiskunde als examenvak een aantal knelpunten kan wegnemen, die nu in de vakkenpakketkeuze en in de aansluiting op het hoger onderwijs worden ervaren. Meisjes kiezen minder vaak wiskunde in hun pakket dan jongens; een verplichting van wiskunde heft dit verschil op en kan bovendien van invloed zijn op de keuze van de exacte vakken. Ook vormt wiskundige basiskennis in toenemende mate een voorwaarde voor het volgen van iedere vorm van hoger onderwijs en voor beroepen op middelbaar en hoger niveau, met name gezien de snelle informatisering van de beroepsuitoefening.
Het verheugt mij, dat u een snelle toename van de belangstelling voor wiskunde signaleert binnen de scholen, die met wiskunde A en B experimenteren. Ik acht integrale invoering van de nieuwe programma's een voorwaarde voor het verplicht stellen van wiskunde als examenvak.
Wat betreft de aansluiting van het MAVO en het nieuwe lyceum streef ik naar een zodanige doorstroomregeling, dat geen onnodige belemmeringen worden opgeworpen, mits wiskunde als examenvak is gekozen.'
We kunnen opmerken dat dit een vriendelijk gestelde brief is waarin echter op geen der door het bestuur genoemde bezwaren wordt ingegaan.
Ons bestuur zal blijven streven naar een onderzoek naar de leerplannen voor LBO, MAVO en onderbouw VWO en HAVO.
Ook in mei 1984 richtte onze vereniging zich in een schrijven tot de Staatssecretaris met het dringende verzoek af te zien van haar voornemen om de centraal schriftelijke eindexamens voor het LBO en het MAVO met ingang van 1986 in machinaal scoorbare vorm af te nemen. Wij hebben dit gedaan in samenwerking met onze collega's van de Nederlandse Vereniging van Onderwijsgevenden in de Natuurwetenschappen. Zij zijn, evenals wij, van mening dat een examen in gesloten vraagvorm nogal wat nadelige effecten zal hebben. Zo zullen niet meer alle onderwijsdoelstellingen in het centraal schriftelijk examen getoetst kunnen worden; opdrachten die een zekere mate van eigen vaardigheid en creativiteit vereisen, zoals het tekenen van figuren en grafieken en het geven van een eigen motivering zullen niet of nauwelijks meer in het examen kunnen voorkomen. Op de tweede plaats vrezen wij een daling van de betrouwbaarheid van een dergelijk examen als toetsinstrument. Verder zal het naar onze mening vaak voorkomen dat een leerling die een examen in gesloten vraagvorm aflegt, niet correct kan worden beoordeeld. Immers: omdat er geen motivering van het door een streepje aangeduide antwoord kan worden gegeven, kan niet of nauwelijks worden beoordeeld of een leerling misschien goede deelantwoorden heeft geproduceerd. Zo wordt een leerling die bij de beantwoording van een meerkeuzevraag een fout van weinig belang maakt in feite een eerlijke waardering onthouden. Een laatste argument: de vorm waarin het centraal examen (het woord schriftelijk durven we al bijna niet meer in de mond te nemen) zal worden afgenomen, heeft altijd invloed op de praktijk van het onderwijs. Met de paspoortfunctie van dit examen voor ogen, zullen veel docenten zich gedwongen voelen om hun leerlingen vooral te oefenen in specifiek toetsgedrag en de leerling zelf zal eindeloos op vraagstukjes in gesloten vraagvorm gaan oefenen om toch vooral niet aan de verkeerde kant van de cesuur te belanden. Al met al meenden wij voldoende argumenten te hebben om de Staatssecretaris te waarschuwen om met haar voornemens niet het verkeerde voorbeeld te geven aan het onderwijs.
Onlangs berichtte de Staatssecretaris ons dat zij haar voornemens heeft gewijzigd en heeft besloten dat maximaal 30% van het centraal schriftelijke

examen kan bestaan uit open vragen. De beoordeling van deze open vragen zal geschieden door de eigen leraar en er zal hierbij geen tweede corrector of gecommiteerde worden ingeschakeld. Hoewel wij blij zijn met de mogelijkheid van open vragen achten wij onze bezwaren door het geringe percentage van 30% slechts gedeeltelijk ondervangen en betreuren wij de aanduiding 'maximaal', omdat zo nog altijd de mogelijkheid bestaat minder of in het geheel geen open vragen in het examen op te nemen. Al met al een zorgelijke situatie die we goed in het oog zullen moeten houden.

Vele andere activiteiten vonden en vinden binnen onze vereniging plaats.

De didactiekcommissie wil naast de andere door haar georganiseerde activiteiten een werkgroep oprichten die zich bezig zal houden met het onderwerp 'HEWET in de onderbouw'. Het zal een studiegroep zijn die zich bezig houdt met de invloed die het HEWET-programma zal kunnen en moeten hebben op de onderbouw. Centraal staat de vraag naar het gebruiken van de HEWET-ideeën in het huidige wiskundeprogramma. Verdere gegevens vindt u in het aug./sept. nummer van Euclides.

Ook de werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' heeft dit jaar niet stilgezeten. Op 8 oktober 1983 werd de vijfde landelijke dag in Utrecht gehouden. Het thema van die dag was: 'Wiskunde in de markt'. Er werd in groepen gewerkt aan lesmateriaal van het Strabrecht College in Geldrop in het kader van het project keuzevrijheden, aan materiaal voor de middenschool van het SLO en aan HEWET-materiaal van de vakgroep OW & OC. De volgende landelijke dag werd op 31 maart in Amsterdam gehouden. Deze dag werd geheel besteed aan de inhoudelijke vulling van de jaarvergadering van vandaag. Op 21 september is op feestelijke wijze het boek 'VrouWiskundig' in Amsterdam aan de vrouw gebracht. We hopen dat ook de mannelijke collega's zich met de problematiek zullen gaan bezig houden.

Evenals vorig jaar gaf het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde diverse conferenties. In maart werd een C-conferentie gehouden met als thema: 'Rekening houden met individuele verschillen'. Er werden twee D-conferenties gehouden over: 'Zingeving van de Wiskunde', in november en april. Voor het cursusjaar 1984-1985 werden een zestal conferenties aangevraagd plus een kaderconferentie. Helaas is het aantal aanmeldingen dermate laag dat het Werkverband 21 september besloot slechts twee conferenties te laten doorgaan. Een D-conferentie in januari 1985 en een E-conferentie in maart 1985. Mochten de aanmeldingsformulieren u nog niet bereikt hebben dan kunt u zich alsnog aanmelden bij Nellie Verhoef.

Na zich vele jaren actief voor de Leesportefeuille te hebben ingezet heeft de heer Hanegraaf verzocht van deze taak ontheven te worden. Ons bestuur is hem dankbaar voor het vele werk dat hij deze jaren heeft verricht en is verheugd dat de heer Doove het werk van hem wil overnemen.

Naast gesprekken met APVO II en ARVO II betreffende het nieuwe lyceum en het HEWET-programma heeft het bestuur dit jaar ook contacten gehad met de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs, de NVORWO. De NVORWO, opgericht op 3 juni 1982, wil als bindend element fungeren voor alle groeperingen, die zich direct of indirect met het reken/wiskunde onderwijs voor leerlingen van 4 tot 14 jaar bezig houden. Zij rekent bij deze paraplufunctie ook de specifieke belangenbehartiging van dit vakgebied. Onze beide besturen hebben besloten waar nodig en mogelijk samen te werken. Als eerste studieonderwerp is gekozen de aansluitingsproblematiek basisonderwijs/voortgezet onderwijs.

Ook met de sectie wiskunde van de SLO heeft dit jaar een gesprek plaats gevonden. Van speciaal belang voor ons zijn de volgende activiteiten van de sectie wiskunde: wiskunde voor 12-16 jarigen, burgerinformatica en informatica als keuzevak voor de bovenbouw VWO/HAVO. Van de projectgroep wiskunde 12-16 liggen de accenten momenteel op algebra, logica en rekenen en worden aanzetten gemaakt voor meetkunde en kansberekening en statistiek. De projectgroep burgerinformatica verzorgt een katernenserie, waarin de ontwikkelingen binnen het 100-scholenproject worden beschreven en waarin voorbeeld-lesmateriaal aan een brede kring van geïnteresseerden beschikbaar gesteld wordt. Over inhoud en plaats van de burgerinformatica in het voortgezet onderwijs moet door de SLO in februari 1985 een advies aan de overheid uitgebracht worden of burgerinformatica een apart vak zal dienen te zijn of geïntegreerd moet worden met andere vakken. Het spreekt vanzelf dat

de projectgroep burgerinformatica gebruik maakt van de vele initiatieven en activiteiten van groeperingen die op dit terrein werkzaam zijn. Daarbij vallen te noemen de NLO's, de werkgroep 'Vrouwen en Informatica' en, last but not least, de vakgroep OW & OC.
Ook namens de commissie Post Academisch Onderwijs mag ik u een verzoek voorleggen. In 1985 moet de commissie wensen voor nascholingscursussen voor het seizoen 1986/1987 indienen. Indien u behoeften hieraan of ideeën hierover heeft vernemen wij die graag spoedig van u.
Ik ben aan het einde van mijn relaas gekomen. Ik wil u allen een waardevolle dag toewensen.

Th. J. Korthagen, voorzitter

Boekbespreking

B. Efron, *The Jackknife, the Bootstrap and other Resampling Plans*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 92 blz., £ 8,–.

Naast een sterk mathematische ontwikkeling van de statistiek komen van tijd tot tijd nieuwe pragmatische ideeën naar voren, die door hun eenvoud eenvoudig toepasbaar zijn. In het onderhavige boekje worden twee van deze ideeën en hun toepassingen besproken: de 'jackknife' en de 'bootstrap'. De populaire namen duiden reeds de op gebruik gerichte betekenis van deze methoden aan. Het is dienstig een indruk van deze methoden te geven.
In beide gevallen is het uitgangspunt dat men over een steekproef van n waarnemingen $x_1, \ldots, x_n$ beschikt en dat men hiermee een onbekende parameter θ van de kansverdeling van de waarnemingen wil schatten, bijvoorbeeld de verwachting (= populatiegemiddelde) of de variantie. Zij θ_n een volgens een vast recept verkregen schatting van θ gebaseerd op de n waarnemingen. Bij de jackknife worden vervolgens $\theta_{(1)}, \ldots, \theta_{(n)}$ berekend, waarin $\theta_{(i)}$ de schatting van θ is die ontstaat als men de i-waarneming buiten beschouwing laat. Door de $\theta_{(i)}$'s handig te combineren kan men schattingen maken van de onzuiverheid (= systematische fout) en de standaarddeviatie van θ_n.
Bij de bootstrap gaat men anders te werk. Men trekt een nieuwe steekproef $x_1^*, \ldots, c_n^*$ van omvang n met teruglegging uit de gegeven waarnemingen $x_1, \ldots, x_n$ en berekent op dezelfde wijze een nieuwe schatting θ_n^* gebaseerd op $x_1^*, \ldots, x_n^*$. Zoals θ de parameter is van de kansverdeling waaruit de x_i's afkomstig zijn, zo is θ_n op te vatten als de parameter van de verdeling van de x_i^*'s. Dit betekent dat $\theta_n - \theta$ geschat kan worden met $\theta_n^* - \theta_n$. Soms is de verdeling van dit laatste verschil eenvoudig te bepalen, maar meestal is dit niet het geval en tracht men een goede indruk van deze verdeling te krijgen door niet éénmaal een steekproef $x_1^*, \ldots, x_n^*$ te trekken, maar vele malen, daarbij telkens een nieuwe waarde van θ_n^* bepalend. Een zekere gelijkenis met de jackknife blijkt al uit het feit, dat de schattingen θ_n^* ontstaan door sommige waarnemingen weg te laten en andere meermaals te tellen, afhankelijk van het lot.
Beide methoden hebben een grote hoeveelheid elementair rekenwerk gemeen. Het gebruik van eenvoudige rekenapparatuur is hierbij vrijwel onmisbaar. Overigens zijn een aantal toepassingen zo eenvoudig, dat ze ook in het vwo als illustratie van computergebruik in de toegepaste wiskunde zouden kunnen dienen.
Het boekje geeft een uitstekend beeld van de betekenis en de toepassingen van de genoemde methoden. Het is de tekst van een serie van tien lezingen die Bradley Efron, een specialist op dit terrein, in de Verenigde Staten heeft gegeven. Hoewel vlot geschreven met vermijding van diepzinnige wiskundige details, is een zekere statistische scholing voor een goed begrip van de materie toch wel noodzakelijk.

J. Oosterhoff

Mededelingen

Willen de abonnees op Wiskunde en Onderwijs, orgaan van de VVWL, hun abonnementsgeld voldoen door storting van *f* 25,50 op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth? Na eerst verlaagd en daarna jarenlang niet verhoogd te zijn, is thans een kleine verhoging van het bedrag nodig gebleken.
De afgelopen jaargang bestond uit 4 afleveringen van samen 640 blz., met rijke en gevarieerde inhoud. Door zich te abonneren op het tijdschrift is men automatisch lid van de VVWL. Wie zich als abonnee wil opgeven, kan dit doen door op het girobiljet te vermelden 'nieuwe abonnee'.
Bedanken is uitsluitend mogelijk voor 1 januari.

P. G. J. Vredenduin

De keuzeproblematiek in 4 vwo: wiskunde A of B?

Zoals eerder aangekondigd, organiseert de NVvW in *januari 1985* op zes plaatsen in Nederland een bijeenkomst over dit thema.
De bijeenkomsten die alle worden gehouden van 16.00 tot 18.00 zijn:

Op *maandag 14 januari 1985* te:

BERGEN OP ZOOM	Rijksscholengemeenschap Burgemeester Stulemeijerlaan 24 4611 EG Bergen op Zoom 01640-4 21 50
HEERENVEEN	Rijksscholengemeenschap Fedde Schurerplein 1 8441 PT Heerenveen 05130-2 54 75
ROTTERDAM	City College Emmaus-Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-77 00 33

Op *donderdag 17 januari 1985* te:

AMSTERDAM	Christelijke Scholengemeenschap Buitenveldert De Cuserstraat 3 1081 CK Amsterdam 020-42 39 02
APELDOORN	Christelijk Lyceum Jachtlaan 108 7313 EC Apeldoorn 055-55 38 88
ROERMOND	Bisschoppelijk College Bob Boumanstraat 30 6042 EH Roermond 04750-2 12 41

Toelichting
Dit schooljaar krijgen alle leerlingen van 4 vwo, wiskundeleraren en schooldecanen te maken met een geheel nieuwe situatie t.a.v. de keuze van wiskunde in het examenpakket. Hoe kunnen leerlingen worden begeleid in de keuze A/B? Is het een goed idee om typische A-vraagstukken en typische B-vraagstukken in proefwerken op te nemen? Welke konsekwenties heeft de keuze A/B bij een vervolgstudie in het HBO? Kan wiskunde A gecombineerd worden met natuurkunde? Enz.
Allemaal vragen waarover op de experimenteer-scholen enige know-how is ontwikkeld. Leraren van die scholen zullen verslag uitbrengen van hun bevindingen.
Op de bijeenkomst zal er ruimschoots gelegenheid zijn voor het stellen van vragen. Bovendien zal er ter plekke een bundel worden verspreid waarin ervaringen en strategieën van diverse scholen zijn beschreven.

Kalender

(zie voor nadere informatie ook altijd de 'Mededelingen' in dit nummer en in voorafgaande nummers)

1984	
za 8 dec:	symposium Wiskunde voor allen. Verplicht? Hilversum
wo 19 dec:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
1985	
za 5 jan:	wintersymp. Wisk. Genootschap, Delft
wo 9 jan:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
ma 14 jan:	keuzeproblematiek 4 vwo, Bergen op Zoom, Heerenveen, Rotterdam
do 17 jan:	keuzeproblematiek 4 vwo, Amsterdam, Apeldoorn, Roermond
24 t/m 26 jan:	D-conferentie, Ede
wo 6 feb:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
za 9 feb:	jaarvergadering VVWL, Antwerpen
28 feb t/m 2 mrt:	B-conferentie, Ede
wo 6 mrt:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
23 mrt:	gem. studiedag NVvW, VVWL, Kapellen (B)
28 t/m 30 mrt:	E-conferentie, Ede
za 30 mrt:	landelijke dag Vrouwen en Wiskunde
1986	
11-16 aug:	ICOTS II, Victoria BC, Canada

Inhoud

Adressen van auteurs

H. Broekman, Ped. Did. Inst. der RU Utrecht, Heidelberglaan 2, 3508 TC Utrecht

J. van Dormolen, Ped. Did. Inst. der RU Utrecht, Heidelberglaan 2, 3508 TC Utrecht

F. Korthagen, Math. Inst. Universiteit van Amsterdam, Roeterstraat 15, 1018 WB Amsterdam

Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld

L. Kuijk, Ringweg 40, 6141 LZ Limbricht

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth